Université d'Aix-Marseille III - Faculté des Sciences et Techniques de Saint-Jérôme

Licence Sciences et Technologies - Mention Maths-Info

I3 - Algorithmique et Programmation

TD n°3

Fonctions et procédures récursives

1. Suites et récursion

1.1. On considère la suite u_n définie par $u_1 = 1$ et $u_n = 3.u_{n-1} + 2$ pour $n > 1$. Ecrire une fonction récursive qui prend en paramètre un entier n et calcule la valeur de u_n.

1.2. On considère la suite v_n définie par $v_1 = 1$, $v_2 = 2$ et $v_n = 2.v_{n-1} - v_{n-2}$ pour $n > 2$. Ecrire une fonction récursive qui prend en paramètre un entier n et calcule la valeur de v_n.

2. Voici 4 façons de calculer la somme des n premiers cubes d'entiers.
- utiliser la formule $SC(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
- utiliser la formule $SC(n) = \Sigma_{i=1}^{i=n} i^3$.
- utiliser la formule récurrente $SC(1) = 1$ et $SC(n) = n^3 + SC(n-1)$.
- utiliser le fait que c'est le carré de la somme des n premiers entiers : $SC(n) = (SE(n))^2$ avec $SE(1) = 1$ et $SE(n) = n + SE(n-1)$.

Pour chacune des quatre méthodes données ci-dessus, écrire la fonction correspondante qui calcule la somme des n premiers cubes d'entiers.

3. La formule du binôme de Newton est : $\forall j \geq 1$, $C_j^0 = C_j^j = 1$ et $\forall i > 0$, $\forall j > i$, $C_j^i = C_{j-1}^i + C_{j-1}^{i-1}$. Ecrire la fonction récursive qui fait le calcul de C_j^i.

4. Calcul récursif de la parité

4.1. On peut déterminer si un nombre n est pair de la façon suivante : si $n = 0$ alors n est pair et si $n = 1$ alors n est impair, sinon la parité de n est celle de $n - 2$.
En suivant ce principe, écrivez la fonction récursive qui détermine si un nombre est pair ou pas.
Comment modifier cette fonction pour qu'elle détermine si un nombre est impair ou pas ?

4.2. Un entier n est pair s'il est égal à 0 ou si $n - 1$ est impair. Un entier n'est pas impair s'il est égal à 0 mais est impair si $n - 1$ est pair.
En suivant ce principe, écrivez les fonctions récursives `pair` et `impair` qui déterminent si un nombre est pair ou pas et si un nombre est impair ou pas.

5. Affichage de figures avec des astérisques

5.1. Ecrivez une procédure itérative d'affichage de n astérisques sur une ligne.
Ecrivez-en une version récursive : si $n > 0$ alors afficher un astérisque et faire un affichage d'une ligne de $n - 1$ astérisques.

5.2. En utilisant la procédure d'affichage d'une ligne d'astérisques écrivez une procédure itérative d'affichage d'un carré d'astérisques de côté n.

5.3. Ecrivez-en une version récursive en définissant une procédure d'affichage d'un rectangle de hauteur h et de longueur n : si $h > 0$, afficher une ligne de n astérisques puis un rectangle d'astérisques de longueur n et de hauteur $h - 1$.

5.4. En utilisant la procédure d'affichage d'une ligne d'astérisques, écrivez une procédure récursive d'affichage d'un triangle droit isocèle (plein d'astérisques) dont la hauteur et la base ont pour longueur n, comme indiqué ci-dessous (pour $n = 4$) :

****
***
**
*

Comment modifier la procédure pour que l'affichage du triangle se fasse à l'envers, comme indiqué ci-dessous ?

*
**
***
****

5.5. En utilisant la procédure d'affichage d'une ligne d'astérisques, écrivez une procédure récursive d'affichage d'un triangle isocèle (plein d'astérisques) de base de longueur $2n-1$ et de hauteur de longueur n, comme indiqué ci-dessous (pour $n = 4$) :

*
**
***
****
***
**
*

6. Fractales

Une fractale est un objet dont les composants sont identiques à lui. Nous allons écrire une procédure qui affiche une ligne fractale d'ordre n. Pour afficher une ligne fractale d'ordre n entre les points A et B, dont la distance est $|AB| = 4k$, il faut tracer 5 lignes fractales d'ordre $n-1$ contiguës :

(1) on part de A et on trace une ligne fractale en avançant dans la direction de B jusqu'au quart du chemin entre A et B,

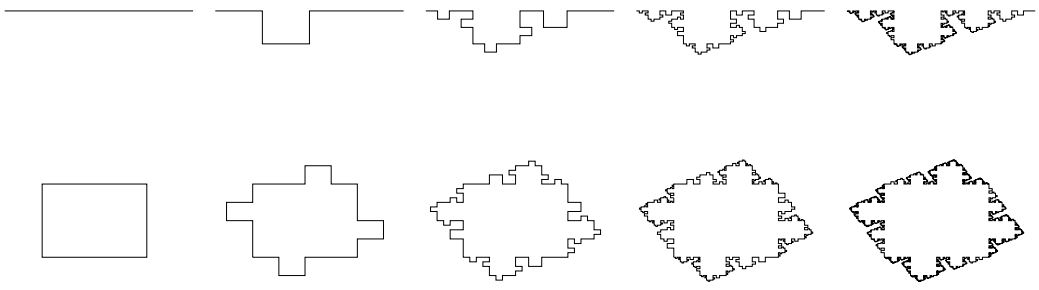
(2) on pivote de 90 degrés à droite et on trace la même ligne fractale,

(3) on tourne à gauche de 90 degrés et on retrace la même ligne fractale,

(4) on recommence ce qu'on a fait en (3),

(5) étant au milieu de A et B, on trace une ligne fractale jusqu'à B.

Une ligne fractale d'ordre 0 est simplement un segment entre A et B. Sur la rangée du haut de figure ci-dessous, on peut voir les lignes fractales de l'ordre 0 à l'ordre 4.



Si on place 4 fractales autour d'un carré, on obtient les dessins de la deuxième rangée.
Ecrire une procédure d'affichage de ligne fractale d'ordre n en considérant qu'il existe une fonction prédéfinie `void segment(int x1, int y1, int x2, int y2)` qui permet de tracer un segment entre les points de coordonnées $(x1, y1)$ et $(x2, y2)$.

7. Nombre de trajets

Soit une grille carré de $n \times n$. On se trouve au départ dans la case (1,1) et on veut se rendre en case (n,n). A chaque déplacement, les seuls deux possibilités sont de descendre d'une case (quand on n'est pas sur la dernière ligne) ou d'aller d'une case vers la droite (quand on n'est pas sur la dernière colonne).

Ecrivez une fonction récursive qui calcule le nombre de trajets possibles pour aller de la case (1,1) à la case (n,n).