I Fonctions dérivables et développement limité

On note i un intervalle de $\mathbb{R}$, ouvert non vide

$i =]a, b[\; ; \; a < b$

ou $i =]-\infty ; +\infty[$

ou $i =]b, +\infty[$

1) Quelques résultats sur les fonctions dérivables

1,1) Définition :

Soit $f : i \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in \mathbb{R}$,
on dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si la limite suivante existe dans $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si elle existe on la note $f'(x)$

f dérivable sur $i \iff \forall x \in i$, f dérivable en x

1,2) Proposition :

Soit $f : i \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in i$
Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si :

il existe $l \in \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon : i \to \mathbb{R}$
tel que :

1) $f(x) = f(x_0) + l(x-x_0) + (x-x_0)\,\varepsilon(x)$
pour tout $x \in i$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Si 1 et 2 sont vérifiés $\to f'(x_0) = l$

Preuve : On suppose que f est dérivable en x_0.
On pose $l = f'(x_0)$

On définit

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0) - l(x-x_0)}{x-x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

On vérifie alors 1) et 2)

soit $x \in i$, si $x \neq x_0$, comme $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0) - l(x-x_0)}{x-x_0}$

On a bien $f(x) = f(x_0) + l(x-x_0) + (x-x_0)\,\varepsilon(x)$

De plus $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} - l$ pour tout $x \neq x_0$

Comme f est dérivable en x_0, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$= f'(x) = \ell$

Donc $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Réciproquement, on suppose qu'il existe ℓ et ε tels que 1) et 2) soient vérifiés

Alors, $\forall x \neq x_0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell + \varepsilon(x)$

(par 1))

D'après 2), $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$

f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$

La prop. 1.2) signifie que f est dérivable en x_0 si et seulement si

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Cette relation donne une approximation de f par un polynôme $P(X) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$ de degré $\leqslant 1$, et l'erreur commise quand on on remplace f par P est $(x-x_0)\,\varepsilon(x)$

1.2) Formule de Taylor.

On cherche à approcher f par un polynôme de degré n.
On suppose que f est dérivable n fois

Définition (1.3)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$
On pose $f^{(0)} = f$
Si $n \in \mathbb{N}$ et si f ~~a~~ on a défini $f^{(n)}$ sur I et si $f^{(n)}$ est dérivable, on pose $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$

On suppose d'abord que f est un polynôme
Lemme 1.4 : Soit $x_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $f : I \to \mathbb{R}$ est un polynôme de degré $\leq n$. Alors $\forall x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$= f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

Preuve : récurrence sur n

$n = 0$. ici f est un polynôme de degré ≤ 0 donc $\forall x \in I$, $f(x) = f(x_0)$

4 Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose le résultat vrai pour tout polynôme de degré $\leqslant n$

Soit f un polynôme de degré $\leqslant n$

On veut montrer que $\forall x \in i$,

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

$$g(x) = f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

On pose g est un polynôme de degré $\leqslant n+1$

$$\forall x \in i \ , \ g'(x) = f'(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

$$= f'(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(x-x_0)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x_0)$$

$$(l = k-1) \quad = f'(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^l}{l-1} f^{(l+1)}(x_0)$$

$$= f'(x) - \sum_{l=0}^{n} \frac{(x-x_0)^l}{l!} f^{(l)}(x_0)$$

Comme f est un polynôme de degré $\leqslant n$,
D'après le théorème de récurrence,

$$\forall x \in i, \ f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

et $\forall x \in I$, $g'(x) = 0$, g est constante sur I

$\forall x \in I$, $g'(x) + g(x_0) = 0$

d'où $\forall x \in I$, $f(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$

Le résultat est donc vrai

Pour $n+1$:

On suppose seulement f n fois dérivable sur I, on a le résultat suivant :

Théorème 1.5 : (Formule de Taylor - Young)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ n fois dérivable sur I et soit $x_0 \in I$,

Alors $\exists$ une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} 1) \quad f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \\ \qquad\qquad + (x-x_0)\,\varepsilon(x) \\ \qquad \forall x \in I \\ 2) \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

Remarque : Cette formule reste vrai si on suppose seulement que f est n fois dérivable en x_0.

C'est à dire que $f^{(n-1)}$ existe sur un intervalle ouvert J et contenant x_0 et $f^{(n-1)}$ est dérivable en x_0

4 1.3) Développement limité

On dit qu'une fonction possède un développement limité au voisinage d'un point si on peut l'approcher par un polynôme au sens suivant :

Définition 1.6 :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$

On dit que f admet un développement limité (DL) d'ordre n au voisinage de x_0 si et seulement si

$\exists$ $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et une fonction $\mathcal{E} : I \to \mathbb{R}$

tel que : (1) $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \mathcal{E}(x)$

$\forall x \in I$

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{E}(x) = 0$

Remarque sur la déf. 1.6) :

La relation (1) définit la fonction $\mathcal{E} : I \to \mathbb{R}$ $\forall x \neq x_0$ par :

$$\mathcal{E}(x) = \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k}{(x - x_0)^n}$$

La relation 2) précise que $\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{E}(x) = 0$

Dire que f possède un DL d'ordre n au voisinage de x_0 signifie exactement :

il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = 0$$

On peut aussi dire que f possède un DL d'ordre n au voisinage de x_0 si et seulement si il existe un polynôme P de degré $\leqslant n$ et une fonction $\mathcal{E} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que :

1) $f(x) = P(x) + (x - x_0) \mathcal{E}(x) \quad \forall x \in J$
2) $\lim_{x \to x_0} \mathcal{E}(x) = 0$

Remarque 1.7 :
Dire que f possède un DL d'ordre n au voisinage de x_0 reviens à dire que $g(x) = f(x + x_0)$ possède un DL d'ordre n au voisinage de x_0

1.3.1) Premières propriétés.

Proposition 1.8 Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$
Si f possède un DL d'ordre n au voisinage de x_0, alors ce DL est unique, c'est à dire que

Si P_1 et P_2 sont des polynômes de degré $\leqslant n$, et $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 : I \to \mathbb{R}$ tels que :

1) $f(x) = P_1(x) + (x - x_0)^n \mathcal{E}_1(x)$

$$f(x) = P_2(x) + (x - x_0)^n \, \mathcal{E}_2(x)$$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{E}_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{E}_2(x) = 0$

alors $P_1(x) = P_2(x) \quad \forall x \in i$

$\mathcal{E}_1(x) = \mathcal{E}_2(x) \quad \forall x \in i$

Si $n \geqslant 1$ et si f possède un DL d'ordre n au voisinage de x_0, alors pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$, f possède un DL d'ordre m au voisinage de x_0

3) Si $i =]-\alpha ; +\alpha[$ avec $\alpha > 0$ et $x_0 = 0$ et si f paire ($f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in i$), alors si f possède un DL d'ordre n au voisinage de 0, tous les coefficients des puissances impaires de x dans ce DL sont nuls.

De même, si f est impaire ($f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in i$) alors si f possède un DL d'ordre n au voisinage de 0, tous les coefficients de puissances paires de x dans ce DL sont nuls.

Définition 1.9 :

Si f possède un DL d'ordre n au voisinage de x_0, <u>le</u> polynôme P de degré $\leqslant n$ tels que

$$f(x) = P(x) + (x - x_0)^n \, \mathcal{E}(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{E}(x) = 0$

[ce polynôme est unique d'après la prop. 1.8]

P s'appelle la partie principale du DL $^{n\text{e}}$ au voisinage de x_0

Preuve de la prop. 1.8 :

1) On suppose que : $f(x) = P_1(x) + (x-x_0)^n \varepsilon_1(x)$
$= P_2(x) + (x-x_0)^n \varepsilon_2(x)$

où P_1 et P_2 sont des polynômes de degré $\leqslant n$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_2(x) = 0$

On veut montrer que $P_1 = P_2$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

On a, $\forall x \in I$,
$0 = P_1(x) - P_2(x) + (x-x_0)^n(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x))$

Si on pose : $P(x) = P_1(x) - P_2(x)$
$\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)$

on voit que :
$\forall x \in I$, $P(x) + (x-x_0)^n \varepsilon(x) = 0$

P est un polynôme de degré $\leqslant n$
$\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Posons $Q(x) = P(x_0 + x)$
On a donc $P(x) = Q(x - x_0)$

Q est un polynôme de degré $\leqslant n$

On le note $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

On suppose que $a_0, \dots, a_n$ ne sont pas tous nuls.
On appelle j le plus petit entier $\leq n$ tel que $a_j \neq 0$

On a donc :
$\forall x \in i$, si $(x-x_0) + (x-x_0)^n \, \mathcal{E}(x) = 0$
donc $\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \, \mathcal{E}(x) = 0$

$$\sum_{k=j}^{n} a_k (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \, \mathcal{E}(x) = 0$$

$\forall x \neq x_0$, on obtient en divisant par $(x-x_0)^j$:

$$\sum_{k=j}^{n} a_k (x-x_0)^{k-j} + (x-x_0)^{n-j} \, \mathcal{E}(x) = 0$$

$\forall x \in i$, $x \neq x_0$

$$a_j + \sum_{k=j+1}^{n} a_k (x-x_0)^k + (x-x_0)^{n-j} \, \mathcal{E}(x) = 0$$

$\forall x \in i$

$\forall k \geq j+1$, $\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^{k-j} = 0$

$(x-x_0)^{n-j}$ est borné pour $x \in]x_0 - 1, x_0 + 1[$

et $\lim_{x \to x_0} \mathcal{E}(x) = 0$

donc $\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^{n-j} \, \mathcal{E}(x) = 0$

On en déduit que :

$$\lim_{x \to x_0} a_j + \sum_{k=j+1}^{n} a_k (x-x_0)^{k-j} + (x-x_0)^n \mathcal{E}(x) = a_j$$

donc $a_j = 0 \Rightarrow$ impossible

Conclusion : les coefficients $a_0, \dots, a_n$ sont tous nuls donc $Q = 0$, puis $P = 0$, donc $P_1 = P_2$

Ensuite, $\forall x \in i$, $(x-x_0)^n \mathcal{E}_1(x) = (x-x_0)^n \mathcal{E}_2(x)$

Donc si $x \neq x_0$, $\mathcal{E}_1(x) = \mathcal{E}_2(x)$

de plus, $\lim_{x \to x_0} \mathcal{E}_1(x) = \lim_{x \to x_0} \mathcal{E}_2(x) = 0$, en particulier

$\mathcal{E}_1(x) = \mathcal{E}_2(x) = 0$.

On a donc $\mathcal{E}_1(x) = \mathcal{E}_2(x)$ $\forall x \in i$

2) On suppose qu'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \mathcal{E}(x)$

avec $\lim_{x \to x_0} \mathcal{E}(x) = 0$

Soit $m \leqslant n$. On a, $\forall x \in i$, ~~f(x) =~~

$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k (x-x_0)^k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \mathcal{E}(x)$

$\sum_{k=0}^{m} a_k (x-x_0)^k$ est un polynôme de degré $\leqslant m$

De plus, $\sum_{k=m+1}^{n} a_k (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \mathcal{E}(x)$

$$= (x-x_0)^m \left(\sum_{k=m+1}^{n} a_k (x-x_0)^{k-m} + (x-x_0)^{n-m} \mathcal{E}(x) \right)$$

Si on pose :

$$\varepsilon_1(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k (x-x_0)^{k-m} + (x-x_0)^{n-m} \varepsilon(x)$$

On a bien $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$

donc f possède un DL d'ordre m au voisinage de x_0, dont la partie principale est donnée par la somme des termes de degré $\leqslant m$ dans la partie principale du DL de f à l'ordre n

3) On suppose $f :]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}$ paire et que f possède un DL d'ordre n au voisinage de 0.

$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$ où $\begin{cases} P \text{ polynôme de degré } \leqslant n \\ \lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$

$\forall x \in i$

$\forall x \in i$, on a donc :

$f(-x) = P(-x) + (-x)^n \varepsilon(-x)$

$f(-x) = P(-x) + (-1)^n x^n \varepsilon(-x)$

$\hookrightarrow = f(x)$

$P(-x)$ est un polynôme de degré $\leqslant n$

et $\lim\limits_{x \to x_0} (-1)^n \varepsilon(-x) = 0$

Donc, par unicité du DL de f à l'ordre n au voisinage de 0, on obtient que : $P(x) = P(-x)$ $\forall x \in I$

Si on note $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

On a $\forall x \in I$, $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k$$

donc $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $a_k = (-1)^k a_k$

Donc $a_k = 0$ si k impair

Idem si f impaire
↳ Exercice.

Pour $n = 0, 1$

f possède un DL d'ordre 0 au voisinage de x_0
$\Longleftrightarrow$ f est continue en x_0 (cf TD1 exo 1)

f possède un DL d'ordre 1 au voisinage de x_0
$\Longleftrightarrow$ f dérivable en 0 (cf prop 1.2 et TD1 exo 1)

Pour $n = 2$.
Si f est n fois dérivable en x_0, alors f possède un $\underbrace{\text{DL}}_{\text{d'ordre } n}$ au voisinage de x_0

donné par la formule de Taylor-Young

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \mathcal{E}(x)$$

donc $\lim_{x \to x_0} \mathcal{E}(x) = 0$

⚠ Par contre, si f possède un DL d'ordre n au voisinage de x_0, f n'est pas forcément n fois dérivable en x_0, ni même 2 fois dérivable en x_0 (cf TD1 exo 2)

1.3.2) DL de fonctions usuelles

DL de fonctions usuelles au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \mathcal{E}(x)$$

avec $\lim_{x \to 0} \mathcal{E}(x) = 0$; $n \in \mathbb{N}$

↳ revient à dire que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^n}{n!}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \mathcal{E}(x)$$

$\lim_{x \to 0} \mathcal{E}(x) = 0$

Preuve : par la formule de Taylor - Young :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^n \mathcal{E}(x) \quad \text{avec} \lim_{x \to 0} \mathcal{E}(x) = 0$$

Par une méthode analogue :

(en 0)

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \mathcal{E}(x)$$

$\lim_{x \to 0} \mathcal{E}(x) = 0$

partout

$$\sin(x) = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \mathcal{E}(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + x^n \mathcal{E}(x)$$

$\alpha \in \mathbb{R} \to$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \mathcal{E}(x)$$

1.3.3) DL d'une somme :

Proposition 1.11.

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$; $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$

On suppose que f et g possèdent des DL d'ordre n

au voisinage de x_0

Alors $f+g$ possède un DL d'ordre n au voisinage de x_0, dont la partie principale est la somme des parties principales des DL de f et g

Preuve.

$$f(x) = P(x) + (x-x_0)^n \varepsilon_1(x) \quad \text{avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$$

P polynôme de degré $\leq n$

$$g(x) = Q(x) + (x-x_0)^n \varepsilon_2(x) \quad \text{avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon_2(x) = 0$$

Q polynôme de degré $\leq n$

$$(f+g)(x) = (P+Q)(x) + (x-x_0)^n (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(x)$$

$P+Q$ polynôme de degré $\leq n$

et $\lim_{x \to x_0} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(x) = 0$

Ex :

$$ch(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon_1(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon_2(x)\right)$$

$$= \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x)$$

$(n = 2m)$ $$\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2m} \varepsilon(x)$$

$(\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0)$

1.3.4) DL d'un produit

Proposition 1.12

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$
On suppose que f et g possèdent un DL d'ordre n au voisinage de x_0.
Alors $f.g$ possède un DL d'ordre n au voisinage de x_0, dont la partie principale est la somme des termes de degré $\leqslant n$ dans le produit des parties principales de f et de g.

Preuve :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon_1(x)$$

avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$

$$g(x) = \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell (x - x_0)^\ell + (x - x_0)^\ell \varepsilon_2(x)$$

avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon_2(x) = 0$

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{0 \leqslant k, \ell} a_k b_\ell (x - x_0)^{k+\ell} + (x - x_0)^n \varepsilon_2(x) \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

$$+ (x - x_0)^n \varepsilon_1(x) \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell (x - x_0)^\ell + (x - x_0)^{2n} \varepsilon_1(x) \varepsilon_2(x)$$

M4

$$= \underbrace{\sum_{\substack{0\leq k,\ell\leq n\\ k+\ell\leq n}} a_k b_\ell (x-x_0)^{k+\ell}}_{P(x)} + \sum_{\substack{0\leq k,\ell\leq n\\ k+\ell\geq n+1}} a_k b_\ell (x-x_0)^{k+\ell}$$

$$+ (x-x_0)^n \left[\varepsilon_2(x)\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + \varepsilon_1(x)\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell (x-x_0)^\ell \right.$$

$$\left. + (x-x_0)^n \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) \right]$$

de degré $\leq n$

$$= P(x) + (x-x_0)^n \left[\sum_{\substack{0\leq k,\ell\leq n\\ k+\ell\geq n+1}} a_k b_\ell (x-x_0)^{k+\ell-n} \right.$$

$$+ \varepsilon_2(x)\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + \varepsilon_1 \sum_{k=0}^{n} b_\ell (x-x_0)^\ell$$

$$\left. + (x-x_0)^n \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) \right]$$

$$\hookrightarrow = \varepsilon(x)$$

(oui..)

$$= P(x) + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Exemple :

DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\cos(x)\ln(1+x)$?

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2\,\mathcal{E}(x)$ à l'ordre 2

$\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{E}(x) = 0$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\,\mathcal{E}(x)$ à l'ordre 4

$\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{E}(x) = 0$

$\cos(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) + x^3\,\mathcal{E}_1(x)$

$\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{E}_1(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \mathcal{E}_2(x) = 0$ $\quad \ln(1+x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + x^3\,\mathcal{E}_2(x)$

$\cos(x)\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}x + x^3\,\mathcal{E}(x)$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{E}(x) = 0$

$= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\,\mathcal{E}(x)$

1.3.5) DL et dérivation :

Proposition 1.14 :

On suppose que $I =]-\alpha, \alpha[$ et que $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f' possède un DL d'ordre n au voisinage de 0

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$$

Alors f possède un DL d'ordre $n+1$ au voisinage de 0 donné par :

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exemple : DL d'ordre 5 au voisinage de 0 de Arctg ?

$$f(x) = \text{Arctg}(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

DL de f' à l'ordre 4 au voisinage de 0 :

$f'(x) = ?$ $\quad \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + u^4 \varepsilon_1(x)$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + x^4 \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + x^8 \varepsilon_1(x^2)$$

$$= 1 - x^2 + x^4 + x^4 \underbrace{\left(-x^2 + x^4 + x^4 \varepsilon_1(x)\right)}_{\varepsilon_2(x)}$$

Donc $\operatorname{Arctg}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + x^5 \varepsilon(x)$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

⚠ Si f possède un DL d'ordre $n+1$ au voisinage de 0, f' ne possède pas forcément de DL d'ordre n au voisinage de 0.

Ex : $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

f possède un DL d'ordre 2 au voisinage de 0

$f(x) = x^2 \, x \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = x^2 \varepsilon(x)$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

f dérivable sur $\mathbb{R}$,

pour $x \neq 0$, $f'(x) = 3x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + x^3 \left(-\dfrac{2}{x^3}\right) \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

$= 3x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - 2 \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

Pour $x = 0$, $f'(x) = 0$
(en regardant le DL de f à l'ordre 1 au voisinage de 0, on calcule $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$)

f' n'est pas continue en 0 donc n'a pas de DL d'ordre 0 en 0

1.3.6) DL d'une fonction composée

Proposition 1.17

On suppose que $I =]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$ et que $g : I \to \mathbb{R}$ possède un DL d'ordre n au voisinage de 0, qu'on note
$g(x) = a_0 + P(x) + x^n \, \varepsilon_1(x)$

où P est un polynôme de degré $\leqslant n$ tel que $P(0) = 0$
et $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $g(0) = a_0$

Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $g(I) \subset J$

et $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction qui possède un DL d'ordre n au voisinage de $g(0) = a_0$

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{g} & J & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ 0 & \longrightarrow & a_0 & \longrightarrow & f(a_0) \end{array}$$

On note donc :

$$f(a_0 + x) = Q(x) + x^n \mathcal{E}_2(x)$$

où Q est un polynôme de degré $\leq n$
et $\lim\limits_{x \to 0} \mathcal{E}_2(x) = 0$

Alors $f \circ g$ possède un DL d'ordre n au voisinage de 0 donné par :

$$(f \circ g)(x) = R(x) + x^n \mathcal{E}(x)$$

où R est la somme des termes $\leq n$ dans $Q \circ P$
et $\lim\limits_{x \to 0} \mathcal{E}(x) = 0$

Preuve :
Pour tout $x \in I$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f(a_0 + P(x) + x^n \mathcal{E}_1(x))$$

$$= Q(P(x) + x^n \mathcal{E}_1(x)) + (P(x) + x^n \mathcal{E}_1(x))^n \cdot \mathcal{E}_2(P(x) + x^n \mathcal{E}_1(x))$$

On note :

$$Q(y) = \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell y^\ell \quad \text{avec } b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$$

Donc : $Q(P(x) + x^n \mathcal{E}_1(x)) = b_0 + \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell (P(x) + x^n \mathcal{E}_1(x))^\ell$

Soit $l \in \{1, \dots, n\}$

$(P(x) + x^n \mathcal{E}_1(x))^l = P(x)^l +$ " les termes où $x^n \mathcal{E}_1(x)$ apparaît avec un exposant ≥ 1 "

donc $Q(P(x) + x^n \mathcal{E}_1(x)) = b_0 + \sum_{l=1}^{n} b_l . P(x)^l$

$+ \sum_{l=1}^{n} b_l . ($ Σ de termes où $x^n \mathcal{E}_1(x)$ apparaît avec un exposant ≥ 1 $)$

$Q(P(x)) = \sum_{l=1}^{n} b_l . ($ Σ des termes où $x^n \mathcal{E}_1(x)$ a un exposant ≥ 1 $)$

$= R(x) + x^n \mathcal{E}_3(x)$

où $\lim_{x \to 0} \mathcal{E}_3(x) = 0$

$\underbrace{(P(x) + x^n \mathcal{E}_1(x))^n}_{\text{somme des termes de type } C_k^n x^k \text{ avec } k \geq 1 + x^n \mathcal{E}_1(x)} \mathcal{E}_2(P(x) + x^n \mathcal{E}_1(x))$; $P(0) = 0$

Donc :

$(P(x) + x^n \mathcal{E}_1(x))^n =$ somme de termes de type $d_k x^k$ avec $k \geq n$

$+ x^n \mathcal{E}_4(x)$ où $\lim_{x \to 0} \mathcal{E}_4(x) = 0$

De plus, $\lim_{x \to 0} P(x) + x^n \varepsilon_1(x) = 0$ car $P(0) = 0$

donc $\lim_{x \to 0} \varepsilon_2\left(P(x) + x^n \varepsilon_1(x)\right) = 0$

Finalement, $\left(P(x) + x^n \varepsilon_1(x)\right)^n \varepsilon_2\left(P(x) + x^n \varepsilon_1(x)\right)$

$= x^n \varepsilon_5(x)$ où $\lim_{x \to 0} \varepsilon_5(x) = 0$

Conclusion :

$(f \circ g)(x) = R(x) + x^n \varepsilon_3(x) + x^n \varepsilon_5(x)$

$= R(x) + x^n \varepsilon(x)$

où $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

Exemple 1.18 :

$h(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ DL de h ~~h~~ au voisinage de 0 à l'ordre 6 ?

$h : \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$

$h = f \circ g$ avec $\begin{cases} g(x) = \cos(x) & ; g(0) = 1 \\ f(y) = \dfrac{1}{y} \end{cases}$

1) DL de g au voisinage de 0 à l'ordre 6 :

$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + x^6 \varepsilon_1(x)$$

où $\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$

2) DL de f au voisinage de $g(0) = 1$ à l'ordre 6
c'est à dire DL de $f(1+y)$ au voisinage de 0 à l'ordre 6.

$$f(1+y) = \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + y^6 + y^6 \varepsilon_2(z)$$

avec $\lim_{y \to 0} \varepsilon_2(y) = 0$

Dans la notation de la Prop 1.17,

$$P(x) = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

$$Q(y) = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + y^6$$

$$(Q \circ P)(x) = Q(P(x)).$$

$$= 1 - \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right) + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right)^2$$

$$\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right)^3 + (\ldots)^4 + (\ldots)^5$$

$$\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\right)^2=\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24}+\Sigma \text{ termes exposant } \geqslant 7$$

$$\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\right)^3=\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\right)^2\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\right)$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24}+\Sigma\geqslant 7\right)\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\right)$$

$$=\frac{x^6}{8}+\Sigma\geqslant 7$$

$$R(x)=1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24}+\frac{x^6}{8}$$

$$=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{5x^4}{4!}+\frac{61x^6}{6!}$$

Donc $\dfrac{1}{\cos(x)}=(f\circ g)(x)$

$$=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\frac{61x^6}{720}+x^6\,\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$

DL de $\tan(x)$ à l'ordre 6 au voisinage de 0 :

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\sin(x)\cdot\frac{1}{\cos(x)}$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^6\,\varepsilon_1(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0$$

$$\tan(x) = S(x) + x^6 \varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

où $S(x) = \Sigma \leq 6$ dans $\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720}\right)$

$$= x + \frac{x^3}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120}$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^6 \varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

Exemple 1.19.

DL de $\ln(\cos(x))$ à l'ordre 6 au voisinage de 0

$$\ln(\cos(x)) = (f \circ g)(x) \quad \text{où} \begin{cases} g(x) = \cos(x) \\ f(y) = \ln(y) \end{cases}$$

$$g(x) = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}}_{P_1(x)} + \varepsilon_1(x) \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

$g(0) = 1$

$f(1+y) = \ln(1+y)$

$$= y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{6} + y^6 \varepsilon_1(y)$$

avec $\lim\limits_{y \to 0} \varepsilon_1(y) = 0$

$$(Q \circ P)(x) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^2$$

$$+ \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^3$$

$$- \frac{1}{4}(\ldots)^4 + \frac{1}{5}(\ldots)^5 - \frac{1}{6}(\ldots)^6$$

$$R(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^6}{8}\right)$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45}$$

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + x^6 \varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

Autre méthode si $h(x) = \ln(\cos(x))$:

$$h'(x) = -\sin(x) \frac{1}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

$$= -\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + x^5 \varepsilon(x)\right) \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Par la proposition 1.14, $h(x) = h(0) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$

$$+ \frac{x^6}{45} + x^6 \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

1.3.7) Quelques applications des DL

- Calculs de limite

Exemple 1.20 :

On cherche si la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x}$ a une limite quand $x \to 0$

Théorèmes sur les quotients : impossible de conclure

$$\begin{cases} \tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_1(x) \\ \lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0 \end{cases}$$

Donc $\tan(x) - x = \dfrac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_1(x)$

$$\begin{cases} \sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_2(x) \\ \lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0 \end{cases}$$

donc $\sin(x) - x = -\frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_2(x)$

donc $\frac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x} = \frac{\frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_1(x)}{-\frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_2(x)}$

$$= \frac{\frac{1}{3} + \varepsilon_1(x)}{-\frac{1}{6} + \varepsilon_2(x)}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{3} + \varepsilon_1(x) = \frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x \to 0} -\frac{1}{6} + \varepsilon_2(x) = -\frac{1}{6}$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x} = -2$

Rq : Si on écrit seulement

$\tan(x) = x + x\,\varepsilon_1(x)$
$\sin(x) = x + x\,\varepsilon_2(x)$

on a $\lim \frac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x} = \frac{\varepsilon_1(x)}{\varepsilon_2(x)}$

Application au prolongement de fonctions

Pour tout $x \neq 0$, on pose :

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}$$

On montre que f possède une limite quand $x \to 0$

Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$

$$x - e^x + 1 = -\frac{x^2}{2} - x^2 \varepsilon_1(x)$$

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)$$

$$x(e^x - 1) = x^2 + \frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon_1(x)$$

$$\frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \frac{-\frac{x^2}{2} - x^2 \varepsilon_1(x)}{x^2 + \frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon_1(x)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} - \varepsilon_1(x)}{1 + \frac{x}{2} + x\varepsilon_1(x)}$$

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$

On définit alors :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

g est continue en 0

g est dérivable en 0 ?

On regarde $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x}$

$$\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{2x - 2(e^x - 1) + x(e^x - 1)}{2x(e^x - 1)}$$

$$= \frac{2x + (x-2)(e^x - 1)}{2x(e^x - 1)}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)$$

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)$$

$$(x-2)(e^x - 1) = x^2 - 2x + \frac{x^3}{2} - x^2 + (x^3 - 2x^2)\varepsilon_1$$

$$2x + (x-2)(e^x - 1) = \frac{x^3}{2} + (x^3 - 2x^2)\,\mathcal{E}(x)$$

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + x^2\,\mathcal{E}_1(x)$$

$$2x(e^x - 1) = 2x^2 + x^3 + 2x^3\,\mathcal{E}_1(x)$$

Donc :

$$\frac{\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x} = \frac{\frac{x}{2} + (x-2)\,\mathcal{E}_1(x)}{2x + x^2 + 2x^2\,\mathcal{E}_1(x)}$$

Calcul insuffisant, on écrit donc :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\,\mathcal{E}(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \mathcal{E}_2(x) = 0$

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\,\mathcal{E}(x)$$

$$(x-2)(e^x - 1) = -2x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + (x^4 - 2x^3)\,\mathcal{E}_2(x)$$

donc $\dfrac{g(x) - g(0)}{x} = \dfrac{\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + (x^4 - 2x^3)\,\mathcal{E}_2(x)}{2x^3 + x^4 + 2x^4\,\mathcal{E}_1(x)}$

donc $g'(0) = \dfrac{1}{12}$

Branches infinies d'une courbe :

Soit $f(x) = (x^4+x^2)^{\frac{1}{4}} - (x^3+x^2)^{\frac{1}{3}}$ pour $x \neq 0$

Comportement de la courbe de f en $+\infty$

Pour $x > 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\left(x^4\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)^{\frac{1}{4}} - \left(x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{3}}}{x}$$

$$= \frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{4}} - x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}}{x}$$

$$= \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{4}} - \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

On a :

$(1+u)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}u + u\,\varepsilon_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$

$(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u + -\frac{1}{3}u^2 + u^2\varepsilon_2(x)$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$

M4

Donc :

$$\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{3x} + \frac{13}{36x^2} + \frac{1}{x^2}\left(\varepsilon_1\left(\frac{1}{x^2}\right) - \varepsilon_2\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

Donc : $f(x) = -\frac{1}{3} + \frac{13}{36x} + \frac{1}{x}\,\varepsilon_1\left(\frac{1}{x^2}\right) - \varepsilon_2\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$

La courbe de f a pour asymptote la droite $y = -\frac{1}{3}$

De plus, $f(x) + \frac{1}{3} = \frac{1}{x}\underbrace{\left(\frac{13}{36} + \varepsilon_1\left(\frac{1}{x^2}\right) \cancel{+} - \varepsilon_2\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}_{\text{tend vers } \frac{13}{36} \text{ en } +\infty}$

Donc $\exists A > 0,\ \forall x > A\ \ f(x) + \frac{1}{3} > 0$

La courbe de f est au dessus de l'asymptote

Exercice : Un calcul analogue montre que pour $x < 0$,

$$f(x) = -2x \cancel{+} - \frac{1}{3} - \frac{5}{36x} + \frac{1}{x}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x)$

la courbe de f admet pour asymptote la droite
$y = -2x - \frac{1}{3}$ et se trouve au dessus de l'asymptote

II Calcul intégral

2.1) Intégrale de Riemann

2.1.1) Fonction en escalier

Définition 2.1 :
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. On appelle subdivision de $[a, b]$ toute suite :

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$ où N est un entier $\geqslant 1$

Si $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, le pas de σ

est définit par :

$$|\sigma| = \max_{0 \leqslant i \leqslant N-1} (x_{i+1} - x_i)$$

Définition 2.2 :

Soient $a < b$ et $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$

On dit que φ est en escalier si et seulement si il existe une subdivision $\sigma = \{x_0, \dots, x_N\}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in \{0, \dots, N-1\}$, φ soit constante sur $]x_i, x_{i+1}[$

Dans ce cas, la subdivision est dite adaptée à φ

Exemple : $\varphi : [0,3] \to \mathbb{R}$
$\qquad x \to E(x)$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x \in [1,2[\\ 2 \text{ si } x \in [2,3[\\ 3 \text{ si } x = 3 \end{cases}$$

La subdivision $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ est adaptée à φ

Définition 2.3 : Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier

Pour toute subdivision $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ adaptée à φ, on note C_i la valeur de φ sur $]x_i, x_{i+1}[$, on pose :

$$i(\varphi, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, C_i$$

Alors $i(\varphi, \sigma)$ ne dépend pas du choix de la subdivision σ (si elle est adaptée à φ), s'appelle l'intégrale de φ sur $[a,b]$ et se note :
$$\int_a^b \varphi(x)\, dx$$

Proposition 2.4

Soient $a < b \in \mathbb{R}$

1) Pour toute fonction $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda\varphi + \mu\psi$ est en escalier et
$$\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi)(x)\,dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)\,dx + \mu \int_a^b \psi(x)\,dx$$

2) Si $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est en escalier, alors $|\varphi|$ est en escalier et : $\left|\int_a^b \varphi(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |\varphi(x)|\,dx$

3) Si $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont en escalier et si $\varphi(x) \leq \psi(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors :
$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b \psi(x)\,dx$

4) Si $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont en escalier, ~~et~~ et si $\{x \in [a,b],\ \varphi(x) \neq \psi(x)\}$ est un ensemble fini, alors $\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b \psi(x)\,dx$

Preuve :

1) En réunissant des subdivisions adaptées à φ et à ψ, on obtient une subdivision $\{x_0, \ldots, x_N\}$ de $[a,b]$ adaptée à φ et à ψ

Pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, il existe $c_i, d_i \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in]x_i, x_{i+1}[$, $\varphi(x) = c_i$ et $\psi(x) = d_i$, alors $\forall x \in]x_i, x_{i+1}[$,

$(\lambda\varphi + \mu\psi)(x) = \lambda c_i + \mu d_i$

donc $\lambda \varphi + \mu \psi$ est en escalier et :

$$\int_a^b (\lambda \varphi + \mu \psi)(x)\, dx = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)(\lambda c_i + \mu d_i)$$

$$= \lambda \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) c_i + \mu \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) d_i$$

$$= \lambda \int_a^b \varphi(x)\, dx + \mu \int_a^b \psi(x)\, dx$$

2) Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier.
il existe une subdivision $\{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in \{0, \dots, N-1\}$, il existe $c_i \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = c_i$ pour tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$

$\forall x \in]x_i, x_{i+1}[\; , |\varphi(x)| = |c_i|$

Donc $|\varphi|$ est en escalier et $\left| \int_a^b \varphi(x)\, dx \right|$

$$= \left|\sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) c_i\right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{|x_{i+1} - x_i|}_{>0} |c_i|$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) |c_i| = \int_a^b |\varphi(x)|\, dx$$

3) On suppose que $\varphi(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in [a,b]$ avec φ et ψ en escalier.
Alors $\psi - \varphi$ est en escalier d'après 1) et $\psi - \varphi(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$

donc $\int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,dx \geqslant 0$

Or, $\int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,dx = \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx$

4) Soient $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier.

On suppose que $\{x \in [a,b],\ \varphi(x) \neq \psi(x)\} = \{x_1, \dots, x_N\}$

avec $x_i < x_{i+1}$ pour tout i

On pose $x_0 = a$ et $x_{N+1} = b$. Alors $\{x_0, \dots, x_{N+1}\}$ est une subdivision de $[a,b]$ et pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$, $\psi(x) - \varphi(x)$, $\psi(x) - \varphi(x) = 0$

$\forall x \in]x_i, x_{i+1}[$

La fonction $\psi - \varphi$ est en escalier et $\int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,dx = 0$

$\int_a^b \psi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx$

2.1.2) Fonctions Riemann-intégrables

Définition 2.5:

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

On dit que f est (Riemann)-intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier telles que :

1) $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$
2) $\int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,dx \leqslant \varepsilon$

donc $\lambda\varphi + \mu\psi$ est en escalier et :

$$\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi)(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)(\lambda c_i + \mu d_i)$$

$$= \lambda \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) c_i + \mu \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) d_i$$

$$= \lambda \int_a^b \varphi(x)\,dx + \mu \int_a^b \psi(x)\,dx$$

2) Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier.
il existe une subdivision $\{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in \{0, \dots, N-1\}$, il existe $c_i \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = c_i$ pour tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$

$\forall x \in]x_i, x_{i+1}[$, $|\varphi(x)| = |c_i|$

Donc $|\varphi|$ est en escalier et $\left|\int_a^b \varphi(x)\,dx\right|$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) c_i$$

$$\leq \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{|x_{i+1} - x_i|}_{>0} |c_i|$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) |c_i| = \int_a^b |\varphi(x)|\,dx$$

3) On suppose que $\varphi(x) \leq \psi(x)$ $\forall x \in [a,b]$ avec φ et ψ en escalier.
Alors $\psi - \varphi$ est en escalier d'après 1) et $\psi - \varphi(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$

⚠ en général $\sup(A) \notin A$ et $\inf(A) \notin A$

Retour aux fonctions intégrables :

Proposition 2.8 :

Soient $a<b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable

1) $\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx$; $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier telle que $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) < f(x) \}$

est non vide et majoré. Il possède donc une borne supérieure notée $i_-(f)$

2) $\{ \int_a^b \psi(x)\,dx$; $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier telle que $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq \psi(x) \}$ est non vide et minoré, il possède donc une borne inférieure notée $i_+(f)$

3) On a $i_-(f) = i_+(f)$

On définit $\int_a^b f(x)\,dx = i_-(f) = i_+(f)$

Preuve :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable

On a vu que f est bornée (prop 2.6) donc $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$

1) La fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \to m$ est en escalier et

$\varphi(x) \leq f(x)$ $\forall x \in [a,b]$, donc $E_-(f) \neq \emptyset$

De plus, si $\varphi_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ est en escalier avec

$\forall x \in [a,b]$, $\varphi_1(x) \leq f(x)$, on a
$\forall x \in [a,b]$, $\varphi_1(x) \leq M$ donc $\int_a^b \varphi_1(x)\,dx \leq M(b-a)$

$E_-(f)$ est majorée par $M(b-a)$

2) De même, $E_+(f)$ est non vide minorée par $m(b-a)$

3) Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier] avec $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$
$\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier] $\forall x \in [a,b]$

$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b \psi(x)\,dx$ (prop 2.4)

comme c'est vrai pour toute fonction
$\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier telle que $\psi(x) \geq f(x)$
$\forall x \in [a,b]$, $\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq i_+(f)$

Cette inégalité est vraie pour toute $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$
en escalier telle que $\varphi(x) \leq f(x)$ $\forall x \in [a,b]$
Donc $i_+(f)$ est un majorant de $E_-(f)$. Donc
$i_-(f) \leq i_+(f)$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier
tel que 1) $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ $\forall x \in [a,b]$
2) $\int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,dx \leq \varepsilon$

$i_+(f) \leq \int_a^b \psi(x)\,dx$

$i_-(f) \geq \int_a^b \varphi(x)\,dx$

$i_+(f) - i_-(f) \leq \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \varepsilon$

Donc, $\forall \varepsilon > 0$,

$i_+(f) - i_-(f) \leq \varepsilon$

donc $i_+(f) - i_-(f) \leq 0$

donc $i_+(f) \leq i_-(f)$

Remarque 2.9 :

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est en escalier, on a donné deux définitions de $\int_a^b f(x)\,dx$ mais ces 2 définitions coïncident car $i_+(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

* Si f est intégrable dans $[a,b]$ et $c, d \in [a,b]$ la restriction de f $[c,d]$ est intégrable et son intégrale est notée $\int_c^d f(x)\,dx$

Proposition 2.10 :

Soient $a < b \in \mathbb{R}$

1) Relation de Chasles. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable et $c \in [a,b]$

Alors, $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$

2) Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ est intégrable et :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$$

3) Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables et si $f(t) \geqslant g(t)$ $\forall\, t \in [a,b]$, alors $\cancel{\int_a^b f(t)\,dt}$

$$\int_a^b f(t)\,dt \geqslant \int_a^b g(t)\,dt$$

4) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable, alors $|f|$ est intégrable et

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$$

⚠ $\int_a^b (f \cdot g)(t)\,dt \neq \left(\int_a^b f(t)\,dt\right) \cdot \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)$

5) Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables, le produit est intégrable

6) Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables et si $\{t \in [a,b] \,;\, f(t) \neq g(t)\}$ est fini, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$$

On a vu que les fonctions en escalier sont intégrables.
De plus,

Théorème 2.11:
Soient $a < b \in \mathbb{R}$

1) Toute fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable
2) Toute fonction monotone sur $[a,b]$ est intégrable

Remarque:
On a vu (Prop 2.6) que toute fonction intégrable sur un intervalle $[a,b]$ est bornée,
Mais la réciproque est fausse

Proposition 2.12:
Soit $a < b \in \mathbb{R}$
et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues

On suppose que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq g(x)$
et qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) > g(c)$
Alors $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$

Preuve : On pose $h = f - g$
h est continue sur $[a,b]$, $\forall x \in [a,b]$, $h(x) \geq 0$
et $h(c) = 0$

On pose $\varepsilon = h(c)$

Par continuité de h en c, il existe $\delta > 0$ tel que :

$\forall x \in]c-\delta, c+\delta[\ , \ |h(x) - h(c)| < \frac{1}{2}\varepsilon$

$, \ h(c) - \frac{1}{2}\varepsilon < h(x) < h(c) + \frac{1}{2}\varepsilon$

$, \ h(x) > \frac{\varepsilon}{2}$

$$\int_a^b h(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{c-\delta} h(x)\,dx}_{\geqslant 0} + \underbrace{\int_{c-\delta}^{c+\delta} h(x)\,dx}_{\geqslant \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}\cdot 2\delta}_{>0}} + \underbrace{\int_{c+\delta}^{b} h(x)\,dx}_{\geqslant 0}$$

Comme $\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

On conclut que $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$

⚠ La prop 2.12 est fausse si f intégrable

⚠ → 2.13) Inégalités de Cauchy-Schwartz et de Minkowski

Théorème 2.13 :
Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables
Alors $f \cdot g$, f^2 et g^2 sont intégrables, et :

(*) $$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)$$

De plus, si f et g sont continues sur $[a,b]$, alors il y a égalité dans (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0 \\ \text{ou} \\ \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in [a,b] \\ \quad f(x) = \alpha g(x) \end{cases}$

Preuve :
$\forall t \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(t) = \int_a^b (f(x) + t.g(x))^2 \, dx$$

$$= \int_a^b f(x)^2 \, dx + 2t \int_a^b g(x) \, dx + \int_a^b g(x)^2 \, dx$$

1^e cas : $\int_a^b g(x)^2 \, dx = 0$

P est un polynôme de degré $\leqslant 1$
De plus, $P(t) \geqslant 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ car $(f(x) + t\,g(x))^2 \geqslant 0$ $\forall x \in [a,b]$

On en déduit que P est constant sur $\mathbb{R}$
donc $2 \int_a^b f(x)\, g(x) \, dx = 0$

donc (*) est vraie

2^e cas : $\int_a^b g(x)^2 \, dx > 0$

P est un polynôme de degré 2 et $P(t) \geqslant 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

Le discriminant de P est $\leqslant 0$

c'est à dire $\left(2\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 - 4\left(\int_a^b g(x)^2dx\right)\left(\int_a^b f(x)^2dx\right)$

$\leqslant 0$

Donc (*) est vraie

On suppose f et g continues

Si $g = 0$, on a bien $\int_a^b (f(x)g(x))^2 = \left(\int_a^b g(x)^2dx\right)\left(\int_a^b f(x)^2 \ldots\right)$

$= 0$

Si $f = \alpha g$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$,

$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \alpha \int_a^b g^2(x)\,dx$

$\left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right) = \alpha^2\left(\int_a^b g^2(x)\right)^2$

il y a bien égalité dans (*)

Réciproquement, on suppose que $\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2$

$= \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$

Si $g(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$: ok

On suppose qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $g(x) \neq 0$

La fonction g^2 est positive et continue sur $[a,b]$

et $g^2(x_0) > 0$

D'après la prop 2.12, $\int_a^b g^2(x)\,dx > 0$

P est de degré 2, positif sur $\mathbb{R}$ et de discriminant nul

Donc P possède une racine $\beta \in \mathbb{R}$.

On a :

$$0 = P(\beta) = \int_a^b \left(f(x) + \beta g(x)\right)^2 dx$$

$(f + \beta g)$ est positive et continue et d'intégrale nulle sur $[a,b]$,
donc $\forall x \in [a,b]$, $f(x) + \beta g(x) = 0$
(Prop. 2.12)

On a donc $f = -\beta g$

Théorème 2.14 :

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables,
Alors $(f+g)^2$ et f^2 et g^2 intégrables et

$$\left(\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

De plus, si f et g sont continues, alors il y a égalité dans $(**)$ $\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in [a,b], g(x) = 0 \\ \text{ou} \\ \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in [a,b] \\ f(x) = \alpha g(x) \end{cases}$

Preuve :

si $\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx = 0$,

alors (**) est vraie

si $\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx > 0$,

$$\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx = \int_a^b (f(x)+g(x))(f(x)+g(x))\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)(f(x)+g(x))\,dx + \int_a^b g(x)(f(x)+g(x))\,dx$$

$$\leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

On a montré que : ($i = \int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx$)

$$i \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot i^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} i^{\frac{1}{2}}$$

En divisant par $i^{\frac{1}{2}}$,

On a :

$$i^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\hookrightarrow$ (**)

Si f et g sont continues, $g = 0$ (**) est une égalité

$f = \alpha g$ (**) est une égalité

On suppose que (**) est une égalité, si $g=0 \to$ ok

Si $\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx = 0$, on a bien $f+g=0$ (voir 2.12)

Si $I>0$, et si (**) est une égalité, alors

$$\int_a^b f(x)\big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b (f+g)^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

et $\int_a^b g(x)\big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b (f+g)^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$

D'après les égalités de (*),

$\exists\, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $f+g = \gamma f$, donc $f(1-\gamma) = -g$

$f = \lambda g$

2.14) Intégrale et primitive

Théorème 2.5 :
Soient $a<b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable
$\forall x \in [a,b]$, on définit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

1) F est continue sur $[a,b]$
2) Si f est continue, alors F est dérivable sur $[a,b]$ et $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

Preuve : 1) Comme f est intégrable, f est bornée en $[a,b]$ (prop 2.6)

il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$

Soit $x \in [a,b]$, on montre que F est continue en x
Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$
Si $y \in [a,b]$ est tel que $|y-x| < \delta$, alors

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_x^y f(t)\,dt \right|$$

$$\leqslant \int_x^y f(t)\,dt \quad (\text{prop } 2.10)$$

$$\leqslant M\,|y-x| < M\delta = \varepsilon$$

F est donc continue en x

2) On suppose f continue.
Soit $x \in [a,b]$ et $\varepsilon > 0$
il existe $\delta > 0$ tel que si $|y-x| < \delta$,
$|f(y) - f(x)| < \varepsilon$

Soit y tel que $|y-x| < \delta$

$$\frac{F(y) - F(x)}{y-x} = \frac{\int_x^y f(t)\,dt}{y-x}$$

donc $$\frac{F(y) - F(x)}{y-x} - f(x) = \frac{\int_x^y \left(f(t) - f(x)\right) dt}{y-x}$$

M4

Si $|y - x| < \delta$ et $t \in [x, y]$, on a aussi $|t - x| < \delta$

donc $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$

On en déduit que :

$$\left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) \right| = \frac{\left| \int_x^y (f(t) - f(x))\, dt \right|}{|y - x|}$$

$$\leq \frac{\int_x^y |f(t) - f(x)|\, dt}{|y - x|}$$

$$\leq \frac{\varepsilon |y - x|}{|y - x|} = \varepsilon$$

Ainsi $\lim_{y \to x} \dfrac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(x)$

Donc $F'(x) = f(x)$

Corollaire 2.16 :
Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue
Alors il existe $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $F' = f$.

F s'appelle la primitive de f.

⚠ → Si G est une primitive de f sur $[a, b]$, alors $G - F$ est une constante sur $[a, b]$
pour ie

et $G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\, dt$

Preuve :
On pose $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$
D'après le théorème 2.15, $F' = f$
Soit G une primitive de f sur $[a,b]$
et $H = G - F$
H est dérivable et $H'(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$
Donc si $x < y \in [a,b]$, par le th des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que $H(y) - H(x) = (y-x)H'(c) = 0$
H est constante.

Enfin, $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$
$= \int_a^b f(t)\,dt$

Corollaire 2.17 (intégration par parties)
Soient $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1
(c'est à dire dérivables sur $[a,b]$ et u' et v' sont continues sur $[a,b]$)
Alors, $\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = u(t)\,v(t) - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$

Preuve :
uv dérivable sur ab et $(uv)' = u'v + uv'$ continue sur $[a,b]$

D'après le corollaire 2.16,

$\int_a^b \left(u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\right)dt = (uv)(b) - (uv)(a)$

2.18 → Exemple : $\int_1^2 \ln(t)\, dt = ?$

$(= 2 \ln(2) - 1)$

⚠ → surt ici

Théorème 2.19 (changement de variable)

Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction C^1
et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue où I est ~~dérivable~~ un intervalle contenant $\varphi([a,b])$

$[a,b] \xrightarrow{\varphi} I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Alors $\int_a^b (f \circ \varphi)(t)\, \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\, du$

Preuve :
On appelle F une primitive de f sur I
et on pose $G = F \circ \varphi$
G est dérivable sur $[a,b]$ et ~~$G'(t) =$~~
$G'(t) = (F' \circ \varphi)(t)\, \varphi'(t) = (f \circ \varphi)(t)\, \varphi'(t)$
$\forall t \in [a,b]$.

$(f \circ \varphi)\, \varphi'$ est continue sur $[a,b]$ d'après (2.16)

$\int_a^b (f \circ \varphi)(t)\, \varphi'(t) = G(b) - G(a)$

$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$

$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\, du$

Exemple 2.20 :
Calcul de $i = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$

On applique le th 2.19 avec :
$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$, $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ $\quad a = 1$, $b = \frac{1}{2}$

On obtient :
$$\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} \cdot \frac{-1}{t^2}\,dt = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = i$$

donc $i = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$

une primitive est $\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$

donc $i = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}\right)$

$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \ln \frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{5}}$$

Exemple 2.21 :
Calcul de $J = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2(t)\cos(t)\,dt$

On applique le Th 2.19 avec :
$f(u) = u^2$ et $\varphi(t) = \sin(t)$, $a = 0$, $b = \frac{3\pi}{2}$

$$J = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$$

$$= \int_0^{-1} u^2\,du = -\frac{1}{3}$$

une primitive est : $u \to \frac{u^3}{3}$

2.15) Sommes de Riemann

Théorème 2.22

Soient $a<b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta < 0$
tel que, pour toute subdivision $\{x_0, \dots, x_N\}$
de $[a,b]$ telle que $x_{i+1} - x_i < \delta \ \forall i$

et toutes points $y_0, \dots, y_{N-1}$ tels que
$y_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) f(y_i) \right| < \varepsilon$$

Corollaire 2.23 :
Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables
Alors :

$$\lim_{n \to 0} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$\lim_{n \to 0} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Preuve du 2.23 :
On applique le Th 2.22 avec
$x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ pour n tel que $\frac{b-a}{n} < \delta$

Exemples :

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1$$

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \qquad \forall\, f(t) = \frac{1}{1+t} \quad \forall t \in [0,1]$$

D'après (2.23), $(a = 0,\ b = 1)$

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} x_n$$

d'où $\lim_{n \to +\infty} x_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(1+1) - \ln(0)$

$$= \ln(2)$$