M4, Devoir 1

A rendre la semaine du 11 février 2008

Dans ce devoir, on note I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions, on dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 si, et seulement si, il existe une fonction $h : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = g(x)h(x) \text{ pour tout } x \in I \text{ et } \lim_{x \to x_0} h(x) = 1.$$

1. Vérifier que, si f est équivalente à g au voisinage de x_0, alors g est équivalente à f au voisinage de x_0. On dit alors que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0.
2. On suppose que $g : I \to \mathbb{R}$ ne s'annule jamais sur I. Montrer que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si, et seulement si,
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$
3. On suppose que $\lim_{x \to x_0} g(x) = l \neq 0$. Montrer que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si, et seulement si, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. Ce résultat est-il vrai si $l = 0$? Justifier votre réponse.
4. Soient f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f_1 et g_1 sont équivalentes au voisinage de x_0 et que f_2 et g_2 sont équivalentes au voisinage de x_0.
   (a) Montrer que $f_1 f_2$ et $g_1 g_2$ sont équivalentes au voisinage de x_0.
   (b) On suppose de plus que, pour tout $x \in I$, $g_1(x) > 0$ et $g_2(x) > 0$. Montrer que $f_1 + f_2$ et $g_1 + g_2$ sont équivalentes au voisinage de x_0. Cette conclusion reste-t-elle valable si on ne suppose plus que g_1 et g_2 sont strictement positives sur I ?
5. On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ et $g(x) = kx^4$, où k est un réel. Peut-on trouver une valeur de k pour que f et g soient équivalentes au voisinage de 0 ?