M4, Corrigé du devoir 1

1. On suppose f équivalente à g au voisinage de x_0. Il existe donc $h : I \to \mathbb{R}$ telle que $f = gh$ et $\lim_{x\to x_0} h(x) = 1$. A cause de cette limite, il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 sur lequel h ne s'annule pas. On peut donc poser $k = \frac{1}{h}$ sur cet intervalle J. On a alors $\lim_{x\to x_0} k(x) = 1$ et $g = kf$ sur J, ce qui montre bien que g est équivalente à f au voisinage de x_0.
2. On suppose f et g équivalentes au voisinage de x_0. On considère h comme dans la question précédente. Comme g ne s'annule jamais sur I, $h = \frac{f}{g}$, donc $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
   Réciproquement, si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ et si on définit $h = \frac{f}{g}$, on a bien $f = gh$ et $\lim_{x\to x_0} h(x) = 1$, donc f et g sont équivalentes au voisinage de x_0.
3. Il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 sur lequel g ne s'annule jamais. D'après la question précédente, f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si, et seulement si, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, et comme $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$, cela équivaut encore à dire que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.
   On suppose maintenant que $l = 0$. Si f et g sont équivalentes au voisinage de x_0, comme $f = gh$ avec $\lim_{x\to x_0} h(x) = 1$, on a bien $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. Par contre, même si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, f et g ne sont pas forcément équivalentes au voisinage de x_0. Par exemple, si $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Mais s'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g = fh$ sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to 0} h(x) = 1$, on a donc $h(x) = x$ pour tout $x \neq 0$, ce qui est incompatible avec $\lim_{x\to 0} h(x) = 1$. Les fonctions f et g ne sont donc pas équivalentes au voisinage de 0.
4. (*a*) Il existe des fonctions h_1 et h_2 sur I telles que $f_1 = g_1h_1$, $f_2 = g_2h_2$ et $\lim_{x\to x_0} h_1(x) = 1$, $\lim_{x\to x_0} h_2(x) = 1$. En posant $h = h_1h_2$, on a bien $f_1f_2 = g_1g_2h$ et $\lim_{x\to x_0} h(x) = 1$, ce qui montre que f_1f_2 et g_1g_2 sont équivalentes au voisinage de x_0.
   (*b*) Pour tout $x \in I$, $g_1(x) \neq 0$, $g_2(x) \neq 0$ et $g_1(x) + g_2(x) \neq 0$, donc

$$\begin{aligned}\frac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)} - 1 &= \frac{(f_1(x)-g_1(x)) + (f_2(x)-g_2(x))}{g_1(x)+g_2(x)} \\ &= \frac{g_1(x)\left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}-1\right) + g_2(x)\left(\frac{f_2(x)}{g_2(x)}-1\right)}{g_1(x)+g_2(x)} \\ &= \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}-1\right)\frac{g_1(x)}{g_1(x)+g_2(x)} + \left(\frac{f_2(x)}{g_2(x)}-1\right)\frac{g_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)}.\end{aligned}$$

   Comme $\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = 1$ et comme la fonction $\frac{g_1}{g_1+g_2}$ est comprise entre 0 et 1 donc bornée, le premier terme de cette dernière somme tend vers

0 quand $x \to x_0$. On raisonne de même avec le deuxième terme, ce qui montre bien que $\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)} = 1$. Ainsi, $f_1 + f_2$ et $g_1 + g_2$ sont équivalentes au voisinage de x_0.
Si on pose $f_1(x) = 1 + x$, $f_2(x) = -1 + x$, $g_1(x) = 1$ et $g_2(x) = -1$, les fonctions f_1 et g_1 sont bien équivalentes au voisinage de 0, ainsi que f_2 et g_2, mais $g_1 + g_2$ est la fonction nulle, Si $f_1 + f_2$ était équivalente à $g_1 + g_2$ au voisinage de 0, il existerait une fonction h tendant vers 1 en 0 telle que $f_1 + f_2 = (g_1 + g_2)h = 0$ sur $\mathbb{R}$, ce qui est impossible car $f_1(x) + f_2(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On conclut que $f_1 + f_2$ n'est pas équivalente à $g_1 + g_2$ au voisinage de 0.

5. Il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tendant vers 0 en 0 telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$. On a donc

$$f(x) = \frac{x^4}{24}\left(1 + 24\varepsilon(x)\right).$$

Si on pose $h(x) = 1+24\varepsilon(x)$, on a $\lim_{x\to 0} h(x) = 1$, donc f est équivalente au voisinage de 0 à la fonction $x \mapsto \frac{1}{24}x^4$.