M4, Devoir 2

A rendre la semaine du 3 mars 2008

Exercice 1

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sin x + \sin(2x)}.$$

1. Sur quel(s) intervalle(s) de $\mathbb{R}$ la fonction f est-elle définie ?
2. Sur chacun des intervalles déterminés à la question 1., trouver une primitive de f.

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}, ce qui veut dire que f est $n+1$ fois dérivable sur $[a, b]$ et que $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a, b]$.

1. Montrer que

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

On raisonnera par récurrence sur n en utilisant une intégration par parties.

2. En déduire que

$$\lim_{x \to a,\ x \neq a} \frac{f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}{(x-a)^n} = 0.$$

Comparer ce résultat avec la formule de Taylor-Young.