M4, Examen partiel du 27 février 2008

Exercice 1

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh x \neq 0$. On définit donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$
2. En appliquant la formule de Taylor-Young, donner les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions $x \mapsto \sinh x$ et $x \mapsto \cosh x$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cosh x}$.
4. Déduire des questions précédentes le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $x \mapsto \tanh x$.

Exercice 2

1. Vérifier que, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, la fonction $\varphi(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ est bien définie.
2. Calculer la dérivée de φ sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.
3. En déduire le développement limité de φ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 3

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto e^{\sin x} - e^{\tan x}$.
2. Calculer
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x}.$$

Question de cours

1. Donner la définition d'une fonction en escalier sur un segment.
2. On définit, pour tout $x \in [0, 1]$,
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$
La fonction f est-elle en escalier sur $[0, 1]$? Justifier la réponse.