M4, Corrigé de l'examen partiel du 27 février 2008

Exercice 1

1. Pour tout réel $t > 0$, $t+\frac{1}{t} = \frac{1}{t}(t^2+1) > 0$, donc en particulier, $e^x+e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puisque $e^x > 0$, ce qui signifie que $\cosh x \neq 0$.
2. Si $f(x) = \sinh x$, $f'(x) = \cosh x$, $f^{(2)}(x) = \sinh x$ et $f^{(3)}(x) = \cosh x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En appliquant la formule de Taylor-Young en 0, on obtient
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)$$
où $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$. De même, si $g(x) = \cosh x$, $g'(x) = \sinh x$, $g^{(2)}(x) = \cosh x$ et $g^{(3)}(x) = \sinh x$. La formule de Taylor-Young donne donc
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_2(x)$$
où $\lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$.
3. Si $h(x) = \frac{1}{\cosh x}$, on a $h = \varphi \circ g$ où $\varphi(u) = \frac{1}{u}$. Comme $\cosh 0 = 1$ et
$$\varphi(1+u) = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\varepsilon_3(u)$$
avec $\lim_{u\to 0} \varepsilon_3(u) = 0$, on trouve que
$$h(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_4(x)$$
avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0$.
4. En faisant le produit des développements limités de $x \mapsto \sinh x$ et $x \mapsto \frac{1}{\cosh x}$, on aboutit à
$$\tanh x = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$$
avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exercice 2

1. La fonction tan est strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $\frac{\pi}{8} < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{8}$, donc $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0$, ce qui montre que φ est bien définie.
2. Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$,
$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{\cos x}.
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, ce qui implique que $\sin(2u) = 2\sin u \cos u$ et $\sin(u + \frac{\pi}{2}) = \cos u$.

3. En raisonnant comme à la question 3. de l'exercice 1, on obtient

$$\varphi'(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$. On en déduit que

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) = x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x).$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exercice 3

1. Si $f(x) = e^{\sin x}$, on a $f = g \circ h$ avec $g(u) = e^u$ et $h(x) = \sin x$. Comme

$$g(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3\varepsilon_1(u)$$

avec $\lim_{u\to 0} \varepsilon_1(u) = 0$ et

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$, on trouve que

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + x^3\varepsilon_3(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_3(x) \end{aligned}$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$.
On obtient le développement limité de $x \mapsto \tan x$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 en multipliant ceux de $x \mapsto \sin x$ et de $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ (obtenu dans l'exercice 2). Cela donne

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_4(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0$. Un calcul analogue à celui effectué pour $e^{\sin x}$ montre que

$$e^{\tan x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon_5(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_5(x) = 0$. En soustrayant, on obtient finalement

$$e^{\sin x} - e^{\tan x} = -\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon_6(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_6(x) = 0$.

2. Comme

$$\sin x - \tan x = -\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon_7(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_7(x) = 0$, on a

$$\frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x} = \frac{-\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon_6(x)}{-\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon_7(x)} = \frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon_6(x)}{-\frac{1}{2} + \varepsilon_7(x)}.$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x} = 1.$$

Question de cours

1. Une fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est en escalier si, et seulement si, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_N = b$ tels que φ soit constante sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $0 \leq i \leq N - 1$.
2. Supposons que f soit en escalier. Alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_N = b$ tels que f soit constante sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $0 \leq i \leq N-1$. Or, dans l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, il existe un nombre $w \in \mathbb{Q}$ et un nombre $z \notin \mathbb{Q}$. On a donc $f(w) = 1$ et $f(z) = 0$, ce qui montre que f n'est pas constante sur $]x_i, x_{i+1}[$. Ainsi, f n'est pas en escalier.