M5

§ 1 Matrice

1.0) Rappel: Soit K un corps
exemple: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}/n_{\mathbb{Z}}$

1.1) Définition: Soit $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
Une famille $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \leftarrow \text{lignes} \\ 1 \leq j \leq n \leftarrow \text{colonnes}}}$ $(\forall a_{i,j} \in K)$

s'appelle matrice de taille m, n avec coefficients $a_{ij} \in K$ et elle vient typiquement représentée sous forme rectangulaire.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \text{———} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \text{———} & a_{2,n} \\ & \text{————————} & \\ a_{m,1} & \text{———} & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Si m, n sont donnés, on écrit $M = (a_{i,j})_{i,j}$

$\mathbb{M}_{m \times n}(K)$ = ensemble des matrices de taille $m \times n$ et de coefficients dans K

$m = n$: $\mathbb{M}_n(K) = \mathbb{M}_{n \times m}(K)$

Exemple:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} ; \quad [7] \in \mathbb{M}_{1,1}(\mathbb{R})$$

1.2) Addition et multiplication de matrices

Soit $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$ et $B \in \mathbb{M}_{p \times q}(K)$

$A = (a_{i,j})_{i,j}$; $B = (b_{i,j})_{i,j}$

(a) $$A + B = \begin{cases} \text{pas définit si } m \neq p \\ \qquad\qquad\quad\ \ n \neq q \\ (a_{i,j} + b_{i,j})_{i,j} \text{ si } m = p \\ \qquad\qquad\qquad\quad \text{et } n = q \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

(b) $$A \cdot B = \begin{cases} \text{non définit si } n \neq p \\ \sum_{j=1}^{n} (a_{i,j} \ b_{j,k})_{i,k} \text{ si } n = p \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & -1 & 1 \\ + & \times & \times & -2 & -1 & 0 \\ & & \times & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -1 & -3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 3 & -1 \end{array}$$

1.2.5) Règles : Soient A, B, C matrices "de la bonne taille"

(a) $A + B = B + A$

(b) $A . B \neq B . A$

(c) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(d) $(A . B) . C = A . (B . C)$

(e) $A . (B + C) = A . B + A . C$

1.3) Proposition

(a) $M_{m,n}(K)$ muni de $+$ est un groupe abélien :

Élément neutre : $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

Élément inverse : $\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{1,1} & \cdots & -a_{1,n} \\ -a_{m,1} & \cdots & -a_{m,n} \end{bmatrix}$
$= 0$

(b) Supposons $m = n$

$M_n(K)$ muni de "+" et "." est un anneau (= corps sans inverse) avec élément neutre par rapport à "." donné par :

$$i_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A vérifier $\forall A \in \mathbb{M}_n(K)$, $A . i_n = A = i_n . A$

1.4) Multiplication externe

Soit $\lambda \in K$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{M}_{n,n}(K)$

scalaire → On définit $\lambda . A = (\lambda a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{M}_{n,n}(K)$

Ex : $2 . \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 8 & 10 & 2 \end{bmatrix}$

1.4.5) Règles $\forall \lambda, \mu \in K$, A, B de la bonne taille

(a) $(\lambda + \mu) . A = \lambda A + \mu A$

Preuve : exercice en TD

(b) $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$

(c) $\lambda (\mu A) = (\lambda \mu) A$

(d) $1 . A = A$

1.5) Transposition de nombres

Pour $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$

On définit la "transposée" ${}^tA = (a_{j,i})_{i,j}$

$\hookrightarrow \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$

Ex : ${}^t\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

Règles : ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

${}^t(A.B) = {}^tB . {}^tA$

${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^t(A)$

${}^t({}^tA) = A$

1.6) Opérations élémentaires

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$

On définit 3 opérations élémentaires sur A

a) "Transvection"

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{i,1} & & a_{i,n} \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \lambda \quad \overset{T}{\rightsquigarrow} \quad \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{i,1} + \lambda a_{j,1} & & a_{i,n} \\ a_{j,1} & & a_{j,n} \\ a_{m,1} & & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

b) "Permutation" ($\equiv$ transposition)

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \text{—} & a_{1,n} \\ a_{i,1} & \text{—} & a_{i,n} \\ a_{j,1} & \text{—} & a_{j,n} \\ a_{m,1} & \text{—} & a_{m,n} \end{bmatrix} \overset{P}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} a_{1,1} & \text{—} & a_{1,n} \\ a_{j,1} & \text{—} & a_{j,n} \\ a_{i,1} & \text{—} & a_{i,n} \\ a_{m,1} & \text{—} & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

c) "Multiplication"

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \text{—} & a_{1,n} \\ a_{i,1} & \text{—} & a_{i,n} \\ a_{m,1} & \text{—} & a_{m,n} \end{bmatrix} \leftarrow \lambda \quad \overset{M(\lambda)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} a_{1,1} & \text{—} & a_{1,n} \\ \lambda a_{i,1} & \text{—} & a_{i,n} \\ a_{m,1} & \text{—} & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

⚠ $\lambda \neq 0$

On définit exactement en analogie les opérations ${}^tT$, ${}^tP$, ${}^tM$ sur les colonnes.

1.6.5) Remarque: Toute opération élémentaire admet une opération élémentaire inverse.

1.7) Proposition

Soit $A \in M_{m\times n}(K)$

Alors il existait des opérations élémentaires de type $T, P, M, {}^tP$ (mais pas ${}^tT$ ou ${}^tM$) qui transforment A en matrice "normalisée" $A' \in M_{m,n}(K)$ c'est à dire une matrice de type :

$$A' = \begin{array}{cc} & \overbrace{\hphantom{1 \quad \ddots \quad 1}}^{r} \\ r\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right. & \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix} & ? \\ \hline 0 & 0\end{array}\right]\end{array}$$

r est le "rang" de A. Il ne dépend que de A et pas du choix des opération.

Après plusieurs opérations sur A, on aura toujours la possibilité de retrouver le même r.

r "caractérise" A.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \times -1 \\ \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times -1$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \tfrac{1}{3} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A' \text{ normalisé}$$

Ici $r = 2$

1.7.5) Définition :

On définit 3 types de matrices élémentaires

type T :

$$\begin{array}{cc} & \\ i \longrightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \quad\quad\quad\quad \uparrow j \end{array} \qquad a_{i,j} = \lambda \in K$$

type P :

$$\begin{array}{cc} & \\ i & \\ j & \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$
$$\qquad\quad i \quad j$$

Type M : $\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$ $\lambda \neq 0$

1.7.6) Lemme :

(a) Une matrice de type X dérive I_n en appliquant l'opération X

(b) $A \overset{X}{\rightsquigarrow} A'$ (X opération élémentaire)

$\iff A' = X . A$

Pareil : $A \overset{{}^{*}X}{\rightsquigarrow} A'$

$\iff A' = A . X$

Preuve : directe des définitions.

1.7.7) Corollaire :

$\forall A \in \mathbb{M}_{m \times n}(k)$, $\exists A' \in \mathbb{M}_{m \times n}(k)$

A' normalisée, $\exists$ matrice élémentaire $E_1, \dots E_s$ de type T, P ou M et $\exists$ matrice élémentaire $E'_1, \dots E'_t$ de type P tel que :

$$A' \overset{(**)}{=} E_s \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A \cdot E'_1 \cdots E'_t$$

Et donc :

$$A^{(*)} = E_1^{-1} \cdots E_{s-1}^{-1} \cdot E_s^{-1} \cdot A' \cdot E_t'^{-1} \cdots \cdot E_1'^{-1}$$

A est décomposé en produit de matrices élémentaires

Preuve : (*) dérive de (**) qui dérive du 1.7) (en utilisant le 1.7.5))

1.8) Système d'équation linéaire

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{m \times n}(K)$, soit $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M_{n}$ et $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in M_{n \times n}(K)$, alors le système

d'équation linéaire (*) est équivalent à l'équation $A \cdot x = b$ (**)

$$(*) : \begin{cases} a_{1,1} x_{1,1} + \dots + a_{1,m} x_{1,1} = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1} x_{n,1} + \dots + a_{m,n} x_{n,1} = b_n \end{cases}$$

M5

On utilise le 1.7.7)

$$A = E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_s^{-1} A' E'_t \cdot \ldots \cdot E'_1$$

matrice normalisée

E^{-1} matrices élémentaires de type T, P, ou M
E' matrices élémentaires de type P.

Donc : $A \cdot X = b \Leftrightarrow (E_1^{-1} \cdot \ldots E_s^{-1} \cdot A' \cdot E'_t \cdot \ldots \cdot E'_1) \cdot X = b$

$$\Leftrightarrow A' E'_t \cdot \ldots \cdot E'_1 \cdot X = E_j \cdot \ldots \cdot E_j \cdot b$$

$$\Leftrightarrow A' \cdot X' = b'$$

(* * *)

Th. : Soient A, b, X comme donné, et soient A', b', X' dérivée A, b, X par le procédé de normalisation comme ci-dessous (voir exemple en dessous)

Alors X est une solution de (* *)
$\Leftrightarrow$ X' n'est plus solution de (* * *)
et on distingue 3 cas, selon le rang r de la matrice normalisée A'.

Pas de solution $\Rightarrow$ (1) $\exists\, b'_i \neq 0$ où $r+1 \leq i \leq m$

Solution unique $\Rightarrow$ (2) $b'_{r+1} = b'_{r+2} = \ldots = b'_m = 0$ et $r = n$

solution : $x_1' = b_1'$, $x_2' = b_2'$, ... , $x_n' = b_n'$

infinité de solutions $\Rightarrow$ (3) $b'_{r+1} = b'_{r+2} = \dots = 0$ et $r < n$

Solution : $\left.\begin{array}{l} x'_{r+1} = \\ \vdots \\ x'_n = \end{array}\right\}$ arbitraires

$$x'_1 = b'_1 - (a'_{1,r+1} x'_{r+1} + \dots + a'_{1,n} x'_n)$$
$$\vdots$$
$$x'_r = b'_r - (a'_{r,r+1} x'_{r+1} + \dots + a'_{r,n} x'_n)$$

Exemple :

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ 0x + y + z = 2 \end{array}\right\} *$$

$$\Leftrightarrow (*) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

x	y	z	
1	1	-1	1
-1	-1	2	0
0	0	1	2

Normalisation :

X	Y	Z	
1	1	-1	1
0	0	1	1
0	0	1	2

X	Z	Y	
1	-1	1	1
0	1	0	1
0	1	0	2

	X	Z	Y	
$r=2$	1	-1	1	1
	0	1	0	1
	0	0	0	1

1.9) Matrices inverses

Soient $M, M' \in \mathcal{M}_n(K)$

carrées

On note $M \cdot M' = I_n \Leftrightarrow M' = M^{-1}$ et M est dite "inversible"

(NB : $M \cdot M' = I_n \Leftrightarrow M' \cdot M = I_n$)

Méthode pour calculer M^{-1} :
(Pour $M \in M(K)$ donnée)
On peut vérifier que M n'est pas inversible
On définit la matrice $A \in M_{n,2n}(K)$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\quad M \quad}_{n} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}_{n} \end{array}\right] \Big\} n$$

Et on essaye de normaliser A comme en 1.7
Mais, sans utiliser ${}^tP$ (seulement T, P, M)

2 cas :
1) Normalisation complète
on obtient :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & M' \end{array}\right]$$

Dans ce cas, $M' = M^{-1}$ et on a l'inverse.

2) Normalisation impossible sans ${}^tP$
$\Rightarrow M$ n'est pas inversible
($\Leftrightarrow \nexists M'$ tel que $M \cdot M' = I_n$)

(si $M = 0$, on ne sait pas normaliser)

Preuve du 1) :

$$A \rightsquigarrow A' \overset{1.7.6}{\Leftrightarrow} A' = E_s \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$$
$$\Leftrightarrow I_n = E_s \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot M \quad \text{et } M' = E_s \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot I_n$$
$$\Leftrightarrow M' \cdot M = I_n$$

1.9.3) Déf : L'ensemble des nombres inversibles de taille $n \times n$ est noté $GL_n(K) \in M_n(K)$

et c'est un groupe non abélien pour $n \geq 2$
abélien pour $n = 1$

1.10) La (in)dépendance linéaire et le rang d'une matrice

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} = M_{m \times n}(K)$

Les colonnes de A sont dites "linéairement dépendantes"
$\Leftrightarrow$ il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n = K$,
pas tous $\lambda_i = 0$ (!)

telles que : $\lambda_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Autrement, les colonnes de A sont "linéairement indépendantes".

(Pareil pour les lignes)

On définit le rang (par colonne) de A :
maximal de colonnes de A qui sont linéairement indépendantes

(Pareil sur les lignes)

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{rang de A par colonne} \leq 2$$

$$1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.10.5) Proposition :

Soit $A \in M_{m \times n}(K)$ et soit A' normalisation de A.

Alors le rang de A par ligne = rang (A) par colonne = $r(A')$

On note $\text{rang}(A) = r(A')$

Preuve partielle : $r(A') = r$ $\left(\text{car } A' = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & 1 \\ & 0 & \end{bmatrix} \right)$

On voit que rang (A) par colonnes $= r$
car le ${}^tP$ n'influe pas la dépendance / indépendance
linéaire de colonne et pareil pour T, P et M

En particulier rang ${}^tA$ = rang A

§2 Le déterminant

2.0) δ de Kronecker : $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

2.1) Rappel des permutations

Une permutation est une bijection

$\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$

qui est notée : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

S_n = groupe symétrique = $\left\{ \sigma \;\middle|\; \begin{matrix} \sigma \text{ permutation de} \\ n \text{ éléments} \end{matrix} \right\}$

$\tau_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$

"transposition"

On définit $\mathrm{inv}(\sigma) = \# \{ (i,j) \mid i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)$

Note : $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)}$

2.2) Définition (Leibniz)

Pour tout $A \in M_n(K)$

Pour A carré, on définit le "déterminant" :

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma_1}, \ldots, a_{n,}$$

Ex :

1) $\det [a_{1,1}] = a_1$

2) $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a.d - b.c$

3) $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a.e.i + b.f.g + d.h.c - c.e.g - f.g.h - b.d.i$

2.3) Linéarité du déterminant

1) $A' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,j} & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \lambda a_{n,j} & a_{n,m} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \det A' = \lambda \det (a_{i,j})_{i,j}$

2)

$$A' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & (a'_{1,j} + a''_{1,j}) & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1} & & (a'_{n,j} + a''_{n,j}) & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$\det A' = \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a'_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a'_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a''_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a''_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

3) Pareil pour les lignes.

Preuve : conséquence de la définition
□

2.4) Le déterminant est "alternant"

a)

$$\det \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & \boxed{} & \boxed{} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & & & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \\ \phantom{a_{n,1} \cdots}\ i \quad j \end{array} = -\det \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & \boxed{} & \boxed{} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & & & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \\ \phantom{a_{n,1} \cdots}\ j \quad i \end{array}$$

115 b) Pareil pour les lignes

2.5) Le déterminant est "normé"

$\det(i_n) = 1$

2.5.2) Il existe une bijection canonique, pour $V_n = M_{n,1}(k)$

$$V^n = \underbrace{V \times V \times V \times V \times \dots \times V}_{n \text{ facteurs}} \to M_n(k)$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{n,1} \end{bmatrix} \times \dots \times \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{n,n} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

2.5.5) Théorème :
Soit $\Delta : V^n \to k$

qui est

2.3 → (a) linéaire en chaque "variable" (= colonnes)

2.4 → (b) alternative

2.5 → (c) normé

Alors : $\Delta\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{bmatrix}, \dots \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$

2.6) Propositions importantes.

Soient $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$

(a) Si deux lignes (ou deux colonnes) de A sont égales $\Rightarrow \det A = 0$

(b) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

(c) Si une ligne (ou une colonne) est entièrement à $0 \Rightarrow \det(A) = 0$

(d) L'opération T ou ${}^tT$ ne change pas le déterminant

e) : 2.4.5)

f) : Pour une matrice triangulaire $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$\det \begin{bmatrix} \ddots & ? \\ 0 & \ddots \end{bmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$

g) $\det {}^tA = \det A$

MAIS $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

2.6.5) Remarque :

(a) $GL_n(K) = \{ A \in M_n(K) \mid A \text{ inversible} \}$

$A, B \in$ ↗

$A \cdot B \neq B \cdot A$

(b) $\varphi : S_n \to GL_n(K)$

$\sigma \to (\delta_{i,\sigma(i)})_{i,j} = \begin{bmatrix} & \dots & \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_n \begin{cases} \text{est un homomorphisme} : \varphi(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varphi(\sigma_1) \cdot \varphi(\sigma_2) \\ \forall \sigma \in S_n, \ \text{sign}(\sigma) = \det(\varphi(\sigma)) \end{cases}$

2.7) Le déterminant d'une matrice unitaire

(a) $\det \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = 1$

(b) $\det \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} = -1$

(c) $\det \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} = \lambda$

2.8) Théorème :

Pour tout A, B carrées ($A, B \in M_n(K)$)
on a :

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

En particulier, le déterminant définit un homomorphisme de groupe

$$\det \; GL_n(K) \to K^* \left(= K \setminus \{0\} \text{ muni de la multiplication} \right)$$

Preuve :
1) Si A ou B est une équation élémentaire, alors on vérifie directement l'énoncé 2.8

2) On utilise l'équation (*) du 2.7.7 :

$$A = E_n^{-1} \cdot E_{n-1}^{-1} \cdots E_1^{-1} \cdot A' \cdot E'_1 \cdots E'_s$$

E_i matrices élémentaires

On calculera

$$\det(A \cdot B) = \det(E_n^{-1} \cdots A' \cdots E'_1)$$

$\det(A) = \det E_n^{-1} \cdot \ldots \cdot \det A' \cdot \ldots \cdot \det E_1'$

$\hookrightarrow \begin{cases} 1 \text{ si } r = 0 \\ 0 \text{ si } r < n \end{cases}$

3) (a) Soit $r < n$

(a) $\det(A.B) = \prod \det(E^{-x}) \cdot \underbrace{\det(A' \cdot E_1' \cdot \ldots \cdot E_s' \cdot B)}_{\det = 0}$

$= 0$

Pareil, $\det A = 0 \Rightarrow \det A \cdot \det B = 0$

(b) $r = n \Rightarrow A' = I_n \cdot \det(I_n)$

$\det(A.B) = \prod \det(E_n^{-1}) \ldots \det(E_s') \cdot \det(B)$

$= \det(A) \cdot \det(B)$

2. 9) Corollaire :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ est inversible ($A \in GL_n(K)$)

$\Leftrightarrow \text{rang}(A) = n$

Preuve : voir preuve 2.8

$\det A = \det(E_1^{-1}) \cdot \det(E_{i-1}^{-1}) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \det(A')$

$\cdot \det(E'_1) \cdots \det(E'_j)$

2.10) Proposition :
Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Le rang de A est égal au nombre maximum r tel que il existe une $(r \times r)$ sous-matrice A' de A tel que $\det A' \neq 0$

idée de la preuve : On note que le r reste invariant si on change A par des opérations élémentaires classiques

2.11) Corollaire
il y a 4 caractérisations équivalentes du rang d'une matrice A.

1) $\text{rang}(A) = r$ où $A \overset{\text{note}}{\rightsquigarrow} A' = r\left\{\begin{bmatrix} 1 \ddots & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right.$

2) $\text{rang}(A) = \#$ max de colonnes de A qui sont linéairement indépendantes

3) $\text{rang}(A) = \#$ ——— lignes ———

4) $\text{rang}(A) =$ taille maximale d'une sous matrice carrée avec $\det(A) \neq 0$

2.12) (décalé) lemme :

2.13) Proposition : Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_n(K)$ et soit $i, k \in \{1, \dots, n\}$. Alors :

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{k,j} A_{i,j} = \begin{cases} \det A & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

où $A_{i,j} = \det \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,j} & a_{1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,j} & a_{i,n} \\ a_{n,1} & a_{n,j} & a_{n,n} \end{bmatrix}}_{\in M_{n-1}(K)}$

$A_{i,j}$ est le "déterminant complémentaire" (au coeff $a_{i,j}$)

2.14) Corollaire
Pour $A = GL_n(K)$, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\left((-1)^{i+j} A_{i,j}\right)_{i,j}$$

Preuve :
Calcul du produit $\left(a_{k,i}\right)_{k,i} \cdot A^{-1} =$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} \frac{1}{\det A} (-1)^{i+j} A_{i,j}\right)_{k,i} \overset{2.13}{=} \left(\delta_{k,i}\right)_{k,i}$$

$$= I_n$$

2.15) Corollaire : (Laplace)

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_n(K)$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} A_{i,k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} A_{k,j}$$

2.16) La règle de Cramer

Soit $A \in GL_n(K)$, les matrices des coefficients, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ le vecteur des "variables"
et $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ les vecteurs des constantes

Alors le système linéaire $A \cdot x = b$
admet la solution unique :

$$x_i = \frac{(a_i)}{\det A}$$

Hypothèses : A matrice carrée et $\det(A) \neq 0$

Preuve :
Par hypothèse, il existe la matrice $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$

$$x = id \cdot x = (A^{-1} \cdot A) \cdot x = A^{-1} \cdot (A \cdot x)$$

$$A^{-1} \cdot b = \frac{1}{\det A} {}^t\left((-1)^{i+j} A_{i,j}\right)_{i,j} \cdot b$$

$$= \frac{1}{\det A} \left((-1)^{i+j} A_{i,j}\right)_{j,i} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} A_{m,1} \cdot b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{m+k} A_{m,n} \cdot b_k \end{bmatrix}$$

Preuve 2.13 :

On fixe $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$S_{n-1} \ni \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \sigma'(1) & \dots & & \sigma'(n-1) \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \sigma'' = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n-1 & n \\ \sigma''(1) & \dots & \sigma''(n-1) & n \end{pmatrix}$$

On définit $\sigma = \tau_1 \circ \sigma'' \circ \tau_2$

$\operatorname{sign}(\tau_1) = (-1)^{n-j}$

$\operatorname{sign}(\tau_2) = (-1)^{n-i}$

On note $\sigma(i) = \tau_1 \circ \sigma'' \circ \tau_2(i) = j$

Donc on voit que on a défini une bijection $S_{n-1} \longrightarrow \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = j\}$

$$\sigma'' \longrightarrow \sigma = \tau_1 \circ \sigma'' \circ \tau_2$$

$$M_n(K) \ni A = \begin{array}{c c} \left[\begin{array}{ccc} a_{1,1} & & a_{1,n} \\ & & \\ & & \\ a_{n,1} & & a_{n,n} \end{array}\right] & i \\ j & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow A' = \begin{bmatrix} a'_{1,1} & & a'_{1,n-1} \\ & & \\ a'_{n-1,1} & & a'_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

où $a'_{k,l} = \begin{cases} a_{k,l} & \text{si } k < i,\ l < j \\ a_{k+1,l} & \text{si } k \geq i,\ l \geq j \\ a_{k,l+1} & \text{si } k < i,\ l \geq j+1 \\ a_{k+1,l+1} & \text{si } k \geq j,\ l \geq j+1 \end{cases}$

Preuve du 2.12.5 :
On calcule $\underbrace{\text{les}}_{\text{selon}}$ cas ① - ④ :

1) $\sigma(k) = \sigma'(k) : k \xrightarrow{\tau_2} k \xrightarrow{\sigma'} \sigma'(k) \xrightarrow{\tau_1} \sigma'(k)$

2) $\sigma(k+1) = \sigma'(k) : k+1 \xrightarrow{\tau_2} k \xrightarrow{\sigma'} \sigma'(k) \xrightarrow{\tau_1} \sigma'(k)$

3) $\sigma(k) = \sigma'(k)+1 : k \xrightarrow{\tau_2} k \xrightarrow{\sigma'} \sigma'(k) \xrightarrow{\tau_1} \sigma'(k)+1$

4) $\sigma(k+1) = \sigma'(k)+1 : k+1 \xrightarrow{\tau_2} k \xrightarrow{\sigma'} \sigma(k) \xrightarrow{\tau_1} \sigma'(k)+1$

$\Rightarrow$ 1) $a'_{k,\sigma'(k)} = a_{k,\sigma(k)} = a_{k,\sigma(k)}$

2) $a'_{k,\sigma'(k)} = a_{k+1,\sigma'(k)} = a_{k+1,\sigma(k+1)}$

3) $a'_{k,\sigma'(k)} = a_{k,\sigma'(k)+1} = a_{k,\sigma'(k)}$

4) $a'_{k,\sigma'(k)} = a_{k+1,\sigma'(k)+1} = a_{k+1,\sigma(k+1)}$

Preuve du t. 13 :

Cas $i \neq k$, conjugué des cas $i = k$, si on remplace le i-ème par le k-ème ($\det = 0$)

Si $i = k$; $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} A_{i,j}$

$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma') a_{1,\sigma(j)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$

$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \sum_{\{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = j\}} \operatorname{sign}(\tau_1^{-1} \circ \sigma' \circ \tau_2) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n-1,\sigma(n-1)}$

$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{i+j} \operatorname{sign} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$

$= \det A$