Faculté des Sciences et Techniques
de Saint-Jérôme

Année 2007/2008
M5

PARTIEL

Durée de l'épreuve: 1 heure 30 minutes

Documents et calculatrices interdits

1/ (a) Donner la définition du déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Comment utiliser le déterminant pour décider si A est inversible ?

(c) Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2/ (a) Enoncer la règle de Cramer.

(b) Quelles sont les deux hypothèses nécessaires ?

(c) Calculer la valeur de x_3, donnée par le système linéaire suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_4 & = & 0 \\ x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

3/ (a) Enoncer le théorème de Laplace pour développer le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ par rapport à la j-ième colonne.

(b) Développer $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ par rapport à la 2-ième ligne, et le calculer en utilisant la règle de Sarrus.

(c) Pour une matrice de type 4×4, existe-t-il une "règle de Sarrus" ? Laquelle ?

4/ Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_{k\times k}(\mathbb{R})$ une matrice normalisée de rang $k-1 \geq 0$. On considère le système linéaire

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}.$$

a) Enoncer la condition nécéssaire et suffisante pour que ce système linéaire n'ait pas de solution.

b) Est il possible que le système ait une solution unique ?

5/ Resoudre le système suivant :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\
 & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\
 & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & -1 \\
x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 & & & = & 1
\end{array}$$

6/ Vrai ou faux ? (sans preuve !)

(a) $\det AB = 0 \implies \det A = 0$ ou $\det B = 0$ (où $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$).

(b) $\det(A \cdot B \cdot A^{-1}) = \det B$.

(c) A inversible $\implies \det A = \pm 1$

(d) Pour tout $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ il existe $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ tel que $A \cdot B = \det A \cdot I_n$.

(e) $\det(\lambda A + \mu B) = \lambda \det A + \mu \det B \quad (\lambda,\ \mu \in \mathbb{R})$.

(f) E élémentaire $\implies \det E = 1$ où $\det E = -1$

(g) $\det(A + B) = \det A + \det B$

7/ (a) Donner une caractérisation du rang d'une matrice.

(b) En donner une autre.