## Faculté des Sciences et Techniques de Saint-Jérôme

0/ Rappeller les définitions "groupe (abélien)", "anneau", "corps". Discuter des examples.

$$1/\operatorname{Pour} A = \left[ \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{array} \right] \text{ et } B = \left[ \begin{array}{ccc} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{array} \right] \text{ calculer } A + B, A \cdot B \text{ et } B \cdot A.$$

$$2/\operatorname{Pour} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{calculer} (A \cdot B)C \operatorname{et} A(B \cdot C).$$

$$\operatorname{Montrer} (AB)C = A(BC) \operatorname{pour} \operatorname{tout} A \in \mathbb{M}_{k \times l}(K), B \in \mathbb{M}_{l \times m}(K), C \in \mathbb{M}_{m \times n}(K).$$

3/ Trouver  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$  tel que [1,2]A = [0,3,1]. (Attention : il y a beaucoup de possibilités pour A).

4/ Montrer les propriétés (a), (c) et (e) de 1.2.5 du cours.

5/ Une "matrice diagonale" a tous coéfficients à valeur 0 hors de la diagonale, par exemple

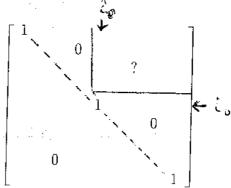
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ ou } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Calculer } AB \text{ et } BA.$$

Montrer que toutes matrices diagonales commutent ( $\iff AB = BA$ ). Trouver une matrice non-diagonale C tel que  $AC \neq CA$ .

Quelles sont précisément toutes les matrices qui commutent avec A?

6/ Une matrice "triangulaire"  $(a_{ij})_{i,j}$  est définie par les équations  $a_{ij} = 0 \ \forall j < i$ . Exemples  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  et  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Calculer  $A \mid B$ . Démontrer que pour tout  $A, B \in \mathbb{M}_n(K)$  triangulaires,  $A \mid B$  est aussi triangulaire.





(avec io fixé) commutent entre eux.

8/ Vérifier que le produit d'une matrice 
$$A$$
 avec une "colonne"  $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$  avec coefficients  $c_i$ .

9/ Montrer 
$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$
 pour tout  $\lambda \in K$ .

10/ Calculer 
$$(\delta_{p,|i-p|})_{i,p} \in \mathbb{M}_{4\times 3}(K)$$
 et sa tansposée.

11/ Vérifier que 
$$\mathbb{M}_n(K)$$
 est un anneau avec élément unité  $I_n$ , en utilisant 1.2 et 1.2.5 du cours.

12/ Vérifier 
$${}^t(BC) = {}^tC \cdot {}^tB$$
 pour  $B$  et  $C$  comme dans 1/ et 2/. Donner une preuve générale.

(a) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$
 (b)  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

$$x_1 + 3x_3 = 0.$$

$$r_0 + 4r_4 - 1$$

$$x_1 + 3x_3 = 0.$$
  
 $x_2 + 4x_4 = 1.$   
 $2x_1 + 6x_3 + x_4 = 0.$ 

15/ Inverser les matrices (suivant 1.9):

(a) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 et (b) 
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$

ou montrer qu'il n'existe pas d'inverse,