Faculté des Sciences et Techniques
de Saint-Jérôme

2ème semestre 2007/2008
M5

T.D. n^o 1

0/ Rappeller les définitions "groupe (abélien)", "anneau", "corps". Discuter des examples.

1/ Pour $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ calculer $A + B$, $A \cdot B$ et $B \cdot A$.

2/ Pour $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ calculer $(A \cdot B)C$ et $A(B \cdot C)$.
Montrer $(AB)C = A(BC)$ pour tout $A \in \mathbb{M}_{k\times l}(K), B \in \mathbb{M}_{l\times m}(K), C \in \mathbb{M}_{m\times n}(K)$.

3/ Trouver $A = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$ tel que $[1,2]A = [0,3,1]$. (Attention : il y a beaucoup de possibilités pour A).

4/ Montrer les propriétés (a), (c) et (e) de 1.2.5 du cours.

5/ Une "matrice diagonale" a tous coéfficients à valeur 0 hors de la diagonale, par exemple
$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ou $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Calculer AB et BA.
Montrer que toutes matrices diagonales commutent ($\Longleftrightarrow AB = BA$).
Trouver une matrice non-diagonale C tel que $AC \neq CA$.
Quelles sont précisément toutes les matrices qui commutent avec A ?

6/ Une matrice "triangulaire" $(a_{ij})_{i,j}$ est définie par les équations $a_{ij} = 0 \; \forall j < i$.
Exemples $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer $A \cdot B$. Démontrer que pour tout $A, B \in \mathbb{M}_n(K)$ triangulaires, $A \cdot B$ est aussi triangulaire.

7/ Montrer que toutes matrices de type

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & & \hspace{3em} i_0 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & & 0 & \vline & ? \\ & \ddots & & \vline & \\ & & \ddots & \vline & \\ \hline & & & 1 & \\ & & & & \ddots \quad 0 \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i_0 \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(avec i_0 fixé) commutent entre eux.

8/ Vérifier que le produit d'une matrice A avec une "colonne" $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ est une combinaison linéaire des colonnes de A avec coefficients c_i.

9/ Montrer $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ pour tout $\lambda \in K$.

10/ Calculer $(\delta_{p,|i-p|})_{i,p} \in \mathbb{M}_{4\times 3}(K)$ et sa tansposée.

11/ Vérifier que $\mathbb{M}_n(K)$ est un anneau avec élément unité I_n, en utilisant 1.2 et 1.2.5 du cours.

12/ Vérifier ${}^t(BC) = {}^tC \cdot {}^tB$ pour B et C comme dans **1/** et **2/**. Donner une preuve générale.

13/ Normaliser les matrices

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

14/ Résoudre le système suivant (en appliquant le théorme 1.8) :

$x_1 + 3x_3 = 0.$
$x_2 + 4x_4 = 1.$
$2x_1 + 6x_3 + x_4 = 0.$

15/ Inverser les matrices (suivant 1.9) :

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et (b)} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$

ou montrer qu'il n'existe pas d'inverse.