M5/ T.D. N°2

1/ Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer J^n pour tout entier positif n

2/ Soit $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer K^2. Pour a et b nombres réels donnés, on pose, $A = aI_4 + bK$. (I_4 est la matrice unité de taille 4×4). Montrer que pour tout entier positif n ils existent des nombres a_n et b_n tels que $A^n = a_n I_4 + b_n K$. Donner l'expression de a_n et b_n en fonction de a, b et n.

3/ Montrer que si la matrice $\begin{pmatrix} x & y & z & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & y & z & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & z & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & z & t \end{pmatrix}$ n'est pas identiquement nulle, alors elle est de rang 4.

4/ Décomposer $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ en produit d'une matrice normalisée et des matrices élémentaires comme dans le corollaire 1.7.7.

5/ Résolution de systèmes d'équations linaires.

a) $\begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y + z + 2t = 3 \\ 4x + 6y + 3z + 4t = 5 \\ 6x + 9y + 5z + 6t = 7 \\ 8x + 12y + 7z + t = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$

6/ [Comparer 2.6.5 du cours]
(a) On définit une application $\Phi : \mathcal{S}_n \to Gl_n(\mathbf{R})$ par $\Phi(\sigma) = (\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j}$ (Attention: $\Phi(\sigma)$ est la transposée de la matrice $M(\sigma)$ définie en exercice 7 !). Calculer $\Phi(\sigma)$ pour plusieurs exemples concrets.
(b) Montrer que Φ est un homomorphisme de groupes.
(c) Montrer que $\det \Phi(\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma)$ pour toute permutation σ.

7/ [Cet exercice est optionel: il peut servir pour mieux comprendre le 2.12 du cours]
A une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on associe une matrice $M(\sigma) = (\delta_{\sigma(i),j})_{i,j}$, et réciproquement (voir 2.1). Quelle est la permutation $\sigma' \in \mathcal{S}_{n-s}$, où $M(\sigma')$ est obtenue si on efface de $M(\sigma)$ les lignes avec indice $i_1, \ldots, i_s$ et les colonnes avec indice $j_1, \ldots, j_s$?