M5/ T.D. N°4

1/ Montrer que $det \begin{bmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{bmatrix} = (x-a)^3\ (x+3a).$

2/ Soit :

$$D_n = det \begin{bmatrix} 1+x^2 & -x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & -x & 1+x^2 & -x\dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{bmatrix}.$$

On cherchera une relation entre $D_n,\ D_{n-1},\ D_{n-2}$, puis ayant posé : $\Delta_n = D_n - D_{n-1}$ on cherchera une relation entre Δ_n et Δ_{n-1}. En déduire Δ_n et après D_n.

3/ a) Montrer que le déterminant d'une matrice A nilpotente est nul, où A nilpotente veut dire qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $A^k = 0$

b) Soit U une matrice carrée orthogonale (c.a.d. ${}^tUU = 1$) à coefficients dans $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Montrer que $\det U = \pm 1$.

c) Soit A une matrice carrée d'ordre impair à coefficient dans $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
On suppose A antisymétrique (c.a.d. ${}^tA = -A$). En déduire la valeur de $\det A$.

4/ Soit la matrice A d'ordre n :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \vdots & \vdots & & & 1 & \\ 0 & 0 & & & 1 & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det A$. Calculer A^{-1} pour $n = 3$.

5/ Calculer le rang de la matrice A et des matrices A_m suivant les valeurs de $m \in \mathbf{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

FEUILLE PERDUE LORS DU SCAN