Faculté des Sciences et Techniques de Saint Jérôme — 2ème Semestre 07/08

M5/ T.D. N°5

1/ Pour quelles valeurs de m, n, m' et n' peut-on donner un isomorphisme (= une bijection qui préserve l'addition et la multiplication scalaire) entre les espaces vectoriels $\mathbf{M}_{m\times n}(K)$ et $\mathbf{M}_{m'\times n'}(K)$?

2/ Sachant que l'ensemble noté $\mathbf{R}^S$ des applications d'un ensemble S dans $\mathbf{R}$ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel, les parties suivantes de $\mathbf{R}^S$ sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

a/ $\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid 2f(0) = f(1)\}$ √
b/ $\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid f(1) = f(0) + 1\}$ F
c/ $\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \mid f$ continue en $x_0\}$, pour $x_0 \in \mathbf{R}$ donné √
d/ $\{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^{\{0,1,2\}} \mid a_0 + a_1 - 2a_2 = x\}$, pour $x \in \mathbf{R}$ donné √
e/ $\mathbf{R}[X] = \{a \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid a^{-1}(\mathbf{N} - \{0\})$ est fini$\}$

3/ Soit E un espace vectoriel sur le corps K, et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

a/ $[E_1 \cup E_2$ est un sous-espace vectoriel de $E] \Longleftrightarrow [E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1]$.
b/ Le complément de E_1 dans E n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

4/ Démontrer les énoncés 3.2 $(a) - (d)$ et 3.5 $(1) - (5)$ du cours.

5/ Dans $\mathbf{R}^3$, démontrer que le sous-espace engendré par a et b d'une part et le sous-espace engendré par c et d d'autre part sont identiques. Déterminer leur dimension puis compléter $\{a, b\}$ pour obtenir une base de $\mathbf{R}^3$.

$$a = (2, 3, -1)\ ,\ b = (1, -1, -2)\ ,\ c = (3, 7, 0)\ ,\ d = (5, 0, -7).$$

6/ Mêmes questions dans $\mathbf{R}^4$ avec

$$a = (2, 3, -1, 0)\ ,\ b = (-3, 1, 0, 2)\ ,\ c = (-4, 5, -1, 4)\ \ d = (9, 8, -3, -2).$$

7/ Soit E un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbf{R}$. $\varepsilon = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, une base de E, et pour $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$:

$$v_1 = e_1 + 2e_2 + \alpha e_3 + e_4;$$
$$v_2 = \alpha e_1 + e_2 + 2e_3 + 3e_4;$$
$$v_3 = e_2 + \beta e_3.$$

Déterminer α et β afin que v_1, v_2, v_3 soient linéairement dépendants.

8/ Montrer que l'ensemble des applications continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, noté $C(\mathbf{R}; \mathbf{R})$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, dans lequel on étudiera l'indépendance linéaire de la partie $\{\sinh\ ,\ \cosh\ ,\ \exp\}$.

9/ Soit F le sous-ensemble de l'espace vectoriel des suites réelles $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, donné par:

$$F = \left\{ (u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \ \mid \ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \right\}$$

a/ Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
b/ Déterminer une base de F.

10/ Soit $E = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ \mid \ 2y = x \text{ et } y + 3z + 2t = 0 \right\}$.

a/ Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
b/ Trouver une base de E, que l'on complètera en une base de $\mathbf{R}^4$.

Soit $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ \mid \ x + z = y + t \right\}$.

c/ Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
d/ Trouver une base de F.
e/ E est-il un sous-espace vectoriel de F ?
f/ Déterminer $E \cap F$ et en donner une base.