

La logique des prédicats (en bref ...)

Tristan Colombo 2001

La logique des prédicats est définie par un **vocabulaire** :

- 2 quantificateur : - universel \forall
- existentiel \exists
- variables
- constantes : - individuelles
- prédicatives
- fonctionnelles
- connecteurs logiques ($\wedge, \neg, \vee, \dots$)
- symboles de ponctuation ('(', ',', ')')

Les **prédicats** sont constitués d'une constante prédicative, suivi d'un certain nombre d'arguments (entre parenthèses, et séparés par des virgules). Par exemple : manger(x,y) est le prédicat « x mange y » où x et y sont des constantes prédicatives.

Exemples :

En **bleu** les constantes prédicatives et en **rouge** les prédicats

- i) Jacques **envoie** un **livre** à Marie
- ii) Une personne **envoie** un **livre** à Marie
- iii) Pierre **envoie** des **fleurs** à quelqu'un

En logique des prédicats, on obtient :

Prédicat : envoie_à(x, y, z) : x envoie y à z

- i) envoie_à(Jacques, livre, Marie)
- ii) $\exists x$ envoie_à(x, livre, Marie)
- iii) $\exists z$ envoie_à(Pierre, Fleurs, z)

Variables libres, variables liées :

On appelle variable liée toute variable en relation avec un prédicat au travers d'une relation de quantification.

Exemples :

- Soit la formule A telle que :

$$A = p(z) \wedge \forall x p(x)$$

Ensemble des variables libres de A : varlib(A) = { z }

Ensemble des variables liées de A : varliée(A) = { x }

- Soient les formules B et C telles que

$$B = p(u) \vee r(z) \wedge \exists x \forall y s(x, y)$$

$$C = \exists u (B)$$

Alors varlib(C) = varlib(B) \ { u } et varliée(C) = varliée(B) \cup { u }

varlib(B) = { u, z } et varliée(B) = { x, y }

varlib(C) = { z } et varliée(C) = { x, y, u }

Je m'arrête là pour l'instant ... ☺

Exercices :

Exprimer en logique des prédicats :

- i) Aucun homme ne se promène
- ii) Certains hommes se promènent
- iii) Chaque homme se promène

Donner les ensembles varlib et varliée pour les formules suivantes :

iv) $A = p(f(x, y)) \vee \forall z r(a, z)$

v) $B = \forall x p(x, y, z) \vee \forall z (q(z) \Rightarrow r(z))$

Correction page suivante ...

Correction :

Prédicat : sepromener(x) : x se promène

i) $\forall x \neg \text{sepromener}(x)$

ii) $\exists x \text{sepromener}(x)$

iii) $\forall x \text{sepromener}(x)$

iv) varliée(A) = { z }

varlib(A) = { x, y }

v) varliée(B) = { x, z }

varlib(B) = { y }