Le lemme de « pompage »

Tristan Colombo 2001

Tout d'abord, une petite précision avant d'aborder ce chapitre : je ne suis pas responsable du nom à la cxx de ce lemme, il porte plusieurs noms mais le plus courant est celui-ci.

> **Lemme de pompage :**
> Soit L un langage régulier, $\exists n \in N$ tel que $\forall z \in L$ avec $|z| > n$, on a : $z = u.v.w$ avec
> $|u.v| \leq n$, $|v| \geq 1$ et $u.v^i.w \in L \quad \forall i \geq 0$

Montrons que $L = \{ a^n b^n \ / \ n \geq 1 \}$ n'est pas rationnel.

Quelques mots de L : ab, aabb, aaabbb, …
Supposons que est rationnel.
$\Rightarrow \exists n \in N$ correspondant au n du lemme.
Soit $z = a^n b^n \in L$ avec $|z| = 2n$

D'après le lemme de pompage, $\exists u, v, w$ tels que :
$z = u.v.w$ avec $|u.v| \leq n$, $|v| \geq 1$ ($\Rightarrow 1 \leq |v| \leq n$ car $|u.v| \leq n$ et $|v| < |u.v|$ …) et
$u.v^i.w \in L \quad \forall i \geq 0$

Prenons $i=2 \Rightarrow u.v.v.w \in L$
Donc $2n < |u.v.v.w| \leq 2n + n$

$|z = u.v.w| < |u.v.v.w|$ car $1 \leq |v| \leq n$ et $|u.v.w| = 2n$ donc $|u.v.v.w| \leq 2n + n$

$\Rightarrow \underbrace{2n}_{|z|} < |u.v.v.w| \leq \underbrace{2(n+1)}_{|z'|}$

où z' est le successeur immédiat de z dans L.

$\Rightarrow$ Entre z et z' il existe un mot u.v.v.w dans L ce qui est impossible, d'où contradiction.

$\Rightarrow L = \{ a^n b^n \ / \ n \geq 1 \}$ n'est pas rationnel.