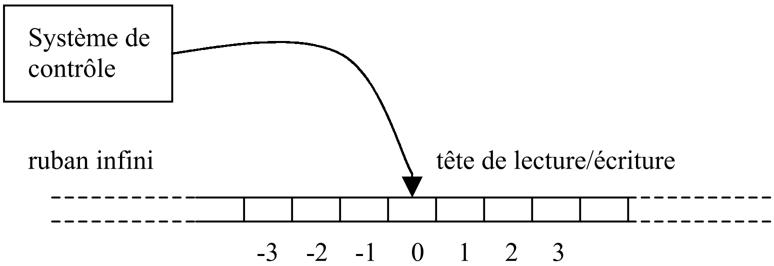
Machines de Turing déterministes

Tristan Colombo 2001

Une **machine de Turing à 1 ruban** est définie par :

- un système de contrôle d'états
- un ruban infini constitué de cases numérotées …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3
- une tête de lecture/écriture pointant sur une case du ruban et pouvant se déplacer d'une case vers la gauche ou vers la droite :



Un **programme** M est défini par $M = (Q, q_0, q_{oui}, q_{non}, \Sigma, \Gamma, B, \delta)$ où :

- **Q** est un ensemble fini d'états
- $\mathbf{q_0} \in Q$ est l'état de départ
- $\mathbf{q_{oui}} \in Q$ est l'état terminal d'acceptation (réponse oui)
- $\mathbf{q_{non}} \in Q$ est l'état terminal de rejet (réponse non)
- Σ est un ensemble fini de symboles : symboles d'entrée pour le codage des données
- Γ est un ensemble fini de symboles : symboles de ruban ($\Gamma \supset \Sigma$). Ce sont les symboles que l'on peut lire ou écrire sur le ruban.
- $\mathbf{B} \in \Gamma$ est le symbole blanc (contenu des cases non-utilisées)
- δ est la fonction de transition :

$$\delta : (Q \setminus \{ q_{oui}, q_{non} \}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{ -1, +1 \}$$

qui permet en partant d'un état $q \in Q \setminus \{ q_{oui}, q_{non} \}$ et d'un symbole de ruban $s \in \Gamma$ se trouvant sur la case pointée par la tête de lecture/écriture d'arriver sur un nouvel état $q' \in Q$, après avoir écrit un symbole de ruban $s' \in \Gamma$ sur la case pointée avant de déplacer la tête de lecture/écriture d'une case vers la gauche (-1) ou vers la droite (+1).

Exemple : $(q_0, a) \to (q_1, a, +1)$

La tête de lecture pointe vers une case contenant la lettre a et on se trouve à l'état q_0. On écrit a sur la case pointée (donc on ne change rien puisqu'il y avait déjà a), on se déplace d'une case vers la droite sur le ruban et on passe à l'état q_1.

Reconnaissance de langages par une MTD

Etant donné un programme M, défini sur un alphabet d'entrée Σ, trois langages disjoints peuvent être définis sur Σ :

- $Accept(M) = \{ u \in \Sigma^* \ /$ le calcul de M s'arrête avec u en entrée sur $q_{oui} \}$
- $Rejet(M) = \{ u \in \Sigma^* \ /$ le calcul de M s'arrête avec u en entrée sur $q_{non} \}$
- $Boucle(M) = \{ u \in \Sigma^* \ /$ le calcul de M ne s'arrête pas avec u en entrée $\}$

Par convention, on notera $L_M = Accept(M)$.

Donnez une machine de Turing déterministe reconnaissant les langages suivants :
$L_1 = \{ u.aa \ / \ u$ mot de $\{ a, b \}^* \}$
On supposera que la donnée (le mot v de $\{ a, b \}^*$) est inscrite sur le ruban de gauche à droite depuis la case 0. Le principe est alors le suivant : déplacer la tête de lecture/écriture vers la droite jusqu'à la fin du mot (le caractère blanc B) puis revenir d'un caractère vers la gauche (si la lettre est a alors on continue sinon rejet), revenir encore d'un caractère (si la lettre est a alors acceptation sinon rejet).
On définit donc la machine de Turing munie du programme suivant :
$M = (Q, q_0, q_{oui}, q_{non}, \Sigma, \Gamma, B, \delta)$ où :
- $Q = \{ q_0, q_1, q_2, q_{oui}, q_{non} \}$
- $\Sigma = \{ a, b \}$
- $\Gamma = \{ a, b, B \}$
- δ est la fonction de transition :

δ	**a**	**b**	B
$\mathbf{q_0}$	$(q_0, a, +1)$	$(q_0, b, +1)$	$(q_1, B, -1)$
$\mathbf{q_1}$	$(q_2, a, -1)$	$(q_{non}, b, ?)$	?
$\mathbf{q_2}$	$(q_{oui}, a, ?)$	$(q_{non}, b, ?)$	?

Explications :

B	B	B	b	b	a	a	B
-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Tant que la tête de lecture lit a ou b elle reste dans l'état q_0 et passe à la case de droite. Quand la tête arrive sur un blanc (ici en case 4), le mot est terminé il faut donc vérifier que les deux dernières lettres sont bien des a : on remonte le ruban vers la gauche (on se retrouve en case 3) et on pase à l'état q_1 (état de vérification : a-t-on la dernière lettre qui vaut a ?). Si à la case 3 la lettre lue est b alors le mot n'est pas du type u.aa : on sort de la machine et on renvoi la valeur non sinon on remonte encore le ruban d'une case (case 2) et on passe à l'état q_2. (Note : lire un B à l'état q_1 n'a aucun sens puisque dans notre parcours vers la droite on s'arrête au premier B rencontré et qu'ensuite on fait le chemin retour …). A l'état q_2 si on lit a c'est que le mot est bien de la forme u.aa et on l'accepte : on renvoi oui sinon on le rejette.
On a donc $L_M = \{ u.aa \ / \ u$ mot de $\{ a, b \}^* \}$

$L_2 = \{ a^n b^n \ / \ n \geq 1 \}$
On supposera que la donnée est inscrite sur le ruban de gauche à droite depuis la case 0. Le principe est alors le suivant : on remplace le a le plus à gauche par X, puis on va chercher le b le plus à gauche et on le remplace par Y. Quand un X vient d'être écrit il faut nécessairement trouver un b sinon il y a échec. Quand il n'y a plus de de a à remplacer par X il faut vérifier qu'il n'y a plus rien à droite des Y (le caractère blanc B).
On définit donc la machine de Turing munie du programme suivant :
$M = (Q, q_0, q_{oui}, q_{non}, \Sigma, \Gamma, B, \delta)$ où :
- $Q = \{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_{oui}, q_{non} \}$ avec :
  - q_0 : sert à remplacer le a le plus à gauche par X
  - q_1 : sert à atteindre le b le plus à gauche et à le remplacer par Y
  - q_2 : sert à atteindre le a le plus à gauche en venant de la droite
  - q_3 : sert à se déplacer sur les Y pour vérifier qu'il n'y a plus à droite ni de a ni de b
- $\Sigma = \{ a, b \}$

- $\Gamma = \{ a, b, X, Y, B \}$
- δ est la fonction de transition :

δ	**a**	**b**	X	Y	B
$\mathbf{q_0}$	$(q_1, X, +1)$	q_{non}	?	$(q_3, Y, +1)$	q_{non}
$\mathbf{q_1}$	$(q_1, a, +1)$	$(q_2, Y, -1)$	?	$(q_1, Y, +1)$	q_{non}
$\mathbf{q_2}$	$(q_2, a, -1)$	?	$(q_0, X, +1)$	$(q_2, Y, -1)$	?
$\mathbf{q_3}$	q_{non}	q_{non}	?	$(q_3, Y, +1)$	q_{oui}

Explications :
Avec u = aabb en entrée, la MTD réagit comme suit (notation : (état actuel) ruban de la MTD avec en rouge la position de la tête de lecture/écriture) :
(q_0) **a**abb → (q_1) X**a**bb → (q_1) Xa**b**b → (q_2) X**a**Yb → (q_2) **X**aYb → (q_0) X**a**Yb → (q_1) XX**Y**b → (q_1) XXY**b** → (q_2) XX**Y**Y → (q_2) X**X**YY → (q_0) XX**Y**Y → (q_3) XXY**Y** → (q_3) XXYY**B** → q_{oui}
On a donc $L_M = \{ a^n b^n / n \geq 1 \}$

$L_3 = \{ (ab)^n c^m / n \geq 0$ et $m \geq 0 \}$
On supposera que la donnée est inscrite sur le ruban de gauche à droite depuis la case 0. Le principe est alors le suivant : lorsqu'on lit un a on va chercher un b sur la case suivante et ainsi de suite. Lorsque l'on rencontre un c on ne doit rencontrer plus que des c jusqu'au caractère blanc B.
On définit donc la machine de Turing munie du programme suivant :
$M = (Q, q_0, q_{oui}, q_{non}, \Sigma, \Gamma, B, \delta)$ où :
- $Q = \{ q_0, q_1, q_2, q_{oui}, q_{non} \}$ avec :
  - q_0 : sert à rechercher un a ou un c
  - q_1 : sert à rechercher un b
  - q_2 : sert à rechercher un c
- $\Sigma = \{ a, b \}$
- $\Gamma = \{ a, b, X, Y, B \}$
- δ est la fonction de transition :

δ	**a**	**b**	**c**	**B**
$\mathbf{q_0}$	$(q_1, a, +1)$	$(q_{non}, b, ?)$	$(q_2, c, +1)$	$(q_{non}, B, ?)$
$\mathbf{q_1}$	$(q_{non}, a, ?)$	$(q_0, b, +1)$	$(q_{non}, c, ?)$	$(q_{non}, B, ?)$
$\mathbf{q_2}$	$(q_{non}, a, ?)$	$(q_{non}, b, ?)$	$(q_2, c, +1)$	$(q_{oui}, B, ?)$

On a donc $L_M = \{ (ab)^n c^m / n \geq 0$ et $m > 0 \}$