

Minimisation d'automates

Tristan Colombo 2001

Etapes préalables :

- Eliminer les cycles vides
- Eliminer les ε -transitions
- Rendre l'automate déterministe
- (facultatif mais simplifie le calcul) Supprimer les états inaccessibles

Algo de minimisation :

- 1) Calculer l'ensemble F des états finaux et l'ensemble $Q \setminus F$ des états non-finaux.
- 2) Pour tout couple d'états distincts $(p, q) \in F \times F$ ou $(p, q) \in (Q \setminus F) \times (Q \setminus F)$ avec $p \neq q$ et $\forall a \in \Sigma, \delta(p, a) = \emptyset$ ssi $\delta(q, a) = \emptyset$, alors (p, q) est une paire candidate à l'équivalence.
- 3) Marquage des paires : On marque la paire (p, q) si la paire (p', q') , obtenue par transition suivant un $a \in \Sigma$, est une paire non-candidate ou une paire déjà marquée.
- 4) Recommencer l'étape 3 tant qu'il n'y a pas de parcours entier du tableau sans marquage.
- 5) Les paires non-marquées restantes représentent les états que l'on peut fusionner pour minimiser l'automate ...

Exemple sur l'automate a) de la feuille d'exercices n°6 :

Etapes préalables :

- Eliminer les cycles vides : pas de cycle vide
- Eliminer les ε -transitions : pas d' ε -transition
- Rendre l'automate déterministe : déjà déterministe
- (facultatif mais simplifie le calcul) Supprimer les états inaccessibles : q_3 est inaccessible : on le supprime

Minimisation :

1) $F = \{ q_2 \}$

$Q \setminus F = \{ q_0, q_1, q_4, q_5, q_6, q_7 \}$

2) Création de la table des transitions avec les paires possibles (voir page suivante) :

δ	a	b
(q ₀ , q ₁)	(q ₁ , q ₆)	(q ₂ , q ₅)
(q ₀ , q ₄)	(q ₁ , q ₇)	(q ₅ , q ₅)
(q ₀ , q ₅)	(q ₁ , q ₂)	(q ₅ , q ₆)
(q ₀ , q ₆)	(q ₁ , q ₆)	(q ₄ , q ₅)
(q ₀ , q ₇)	(q ₁ , q ₆)	(q ₂ , q ₅)
(q ₁ , q ₄)	(q ₆ , q ₇)	(q ₂ , q ₅)
(q ₁ , q ₅)	(q ₂ , q ₆)	(q ₂ , q ₆)
(q ₁ , q ₆)	(q ₆ , q ₆)	(q ₂ , q ₄)
(q ₁ , q ₇)	(q ₆ , q ₆)	(q ₂ , q ₂)
(q ₄ , q ₅)	(q ₂ , q ₇)	(q ₅ , q ₆)
(q ₄ , q ₆)	(q ₆ , q ₇)	(q ₄ , q ₅)
(q ₄ , q ₇)	(q ₆ , q ₇)	(q ₂ , q ₅)
(q ₅ , q ₆)	(q ₂ , q ₆)	(q ₄ , q ₆)
(q ₅ , q ₇)	(q ₂ , q ₆)	(q ₂ , q ₆)
(q ₆ , q ₇)	(q ₆ , q ₆)	(q ₂ , q ₄)

3) On marque les paires qui ne sont pas candidates (en bleu) ; par exemple les paires (p, q) telles que $p \in F$ et $q \in (Q \setminus F)$ et inversement :

δ	a	b
(q ₀ , q ₁)	(q ₁ , q ₆)	(q ₂ , q ₅)
(q ₀ , q ₄)	(q ₁ , q ₇)	(q ₅ , q ₅)
(q ₀ , q ₅)	(q ₁ , q ₂)	(q ₅ , q ₆)
(q ₀ , q ₆)	(q ₁ , q ₆)	(q ₄ , q ₅)
(q ₀ , q ₇)	(q ₁ , q ₆)	(q ₂ , q ₅)
(q ₁ , q ₄)	(q ₆ , q ₇)	(q ₂ , q ₅)
(q ₁ , q ₅)	(q ₂ , q ₆)	(q ₂ , q ₆)
(q ₁ , q ₆)	(q ₆ , q ₆)	(q ₂ , q ₄)
(q ₁ , q ₇)	(q ₆ , q ₆)	(q ₂ , q ₂)
(q ₄ , q ₅)	(q ₂ , q ₇)	(q ₅ , q ₆)
(q ₄ , q ₆)	(q ₆ , q ₇)	(q ₄ , q ₅)
(q ₄ , q ₇)	(q ₆ , q ₇)	(q ₂ , q ₅)
(q ₅ , q ₆)	(q ₂ , q ₆)	(q ₄ , q ₆)
(q ₅ , q ₇)	(q ₂ , q ₆)	(q ₂ , q ₆)
(q ₆ , q ₇)	(q ₆ , q ₆)	(q ₂ , q ₄)

- 4) On refait des passages dans la table jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de marquage :
- 2^{ème} passage en rouge : on marque toutes les paires qui peuvent conduire à une paire déjà marquée (en bleu).
 - 3^{ème} passage : : les paires restantes ne peuvent être marquées ... on a fini !!!

5) On peut donc fusionner les états q₀ et q₄ ainsi que q₁ et q₇ :

$$Q = \{ \{ q_0, q_4 \}, \{ q_1, q_7 \}, q_2, q_5, q_6 \}$$

Exemple sur l'automate b) de la feuille d'exercices n°6 :

Etapas préalables :

- Eliminer les cycles vides : pas de cycle vide
- Eliminer les ε -transitions : pas d' ε -transition
- Rendre l'automate déterministe : déjà déterministe
- (facultatif mais simplifie le calcul) Supprimer les états inaccessibles : aucun état inaccessible

Minimisation :

$$1) F = \{ q_2, q_4, q_5 \}$$

$$Q \setminus F = \{ q_0, q_1, q_3, q_6 \}$$

2) Création de la table des transitions avec les paires possibles :

δ	a	b
(q₂, q₄)	(q ₃ , q ₅)	(q ₁ , q ₃)
(q₂, q₅)	(q ₃ , q ₃)	(q ₁ , q ₆)
(q₄, q₅)	(q ₃ , q ₅)	(q ₃ , q ₆)
(q₀, q₁)	(q ₁ , q ₂)	(q₃, q₄)
(q₀, q₃)	(q ₁ , q ₃)	(q₃, q₄)
(q₀, q₆)	(q ₁ , q ₅)	(q₃, q₄)
(q₁, q₃)	(q₂, q₃)	(q ₃ , q ₃)
(q₁, q₆)	(q ₂ , q ₅)	(q ₃ , q ₃)
(q₃, q₆)	(q ₃ , q ₅)	(q ₃ , q ₃)

3) On marque les paires qui ne sont pas candidates (en bleu) ; par exemple les paires (p, q) telles que $p \in F$ et $q \in (Q \setminus F)$ et inversement.

4) On refait des passages dans la table jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de marquage :
 - 2^{ème} passage : : les paires restantes ne peuvent être marquées ... on a fini !!!

5) On peut donc fusionner les états q_2 et q_5 ainsi que q_1 et q_6 :
 $Q = \{ q_0, \{ q_1, q_6 \}, \{ q_2, q_5 \}, q_3, q_4 \}$