**Université Paul Cézanne - Licence de math-info 2$^e$ année**

**I5 : Examen (1h30, sans document, sans calculatrice)**

**Exercice 1 (7 points)**

Soit $\Sigma = \{a, b\}$ et L l'ensemble de tous les mots de longueur impaire de $\Sigma^*$.

**a.** *Donnez une expression régulière représentant le langage L.*

**b.** *Déterminez un automate fini déterministe qui reconnaît L.* On donnera sa table de transition. *Montrez que votre automate accepte tous les mots de longueur impaire de $\Sigma^*$ et qu'il n'accepte aucun mot de longueur paire.* Conseil : on pourra utiliser un raisonnement par récurrence sur la longueur des mots.

**c.** *Déterminez une grammaire formelle qui engendre L. Montrez que votre grammaire génère tous les mots de longueur impaire de $\Sigma^*$ et qu'elle ne génère aucun mot de longueur paire.*

**Exercice 2 (6 points)**

On appelle A l'automate non-déterministe avec $\epsilon$-transition dont la table de transition est :

| | a | b | $\epsilon$ |
|---|---|---|---|
| $\rightarrow q_0$ | $\{q_1\}$ | $\{q_1\}$ | $\{q_1\}$ |
| $q_1$ | $\{q_2, q_3\}$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $q_2$ | $\{q_3\}$ | $\emptyset$ | $\{q_3\}$ |
| $*q_3$ | $\emptyset$ | $\{q_3\}$ | $\{q_0\}$ |

**a.** *Transformez A en un automate équivalent A' déterministe et sans $\epsilon$-transition.* On écrira la table de transition de A'.

**b.** *Déterminez l'expression régulière représentant le langage reconnu par l'automate A.* Pour ceci, on partira de l'automate A et on utilisera la méthode par élimination d'état.

**c.** *Déterminez une grammaire régulière linéaire à droite engendrant le langage reconnu par A.*

**Exercice 3 (7 points)**

Soit le langage $L = \{(ab)^n(ba)^n \mid n > 0\}$. (Ce langage contient les mots abba, ababbaba, abababbababa, etc)

**a.** *Montrez que L n'est pas un langage régulier.* On pourra utiliser le lemme du facteur itérant : *Pour tout langage régulier L, il existe une constante n (dépendant de L) telle que pour tout mot w de L de longueur supérieure ou égale à n, il existe les mots x, y et z tels que (1) $w = x.y.z$, (2) $y \neq \epsilon$, (3) $|x.y| \leq n$ et (4) $\forall k \geq 0 : x.y^k.z \in L$.*

**b.** *Définissez une machine de Turing reconnaissant le langage L. Justifiez votre machine de Turing en expliquant pourquoi elle accepte tous les mots de ce langage et uniquement ceux-ci.*