

I5 : Langages formels, automates et grammaires - TD n° 1

1. Soit $w = aabc$; donner tous les sous-mots de w . Quelles sont les valeurs minimale et maximale du cardinal de l'ensemble de tous les sous-mots d'un mot de longueur n ?
2. Soit $w = aabc$; donner tous les facteurs de w . Quelles sont les valeurs minimale et maximale du cardinal de l'ensemble de tous les facteurs d'un mot de longueur n ?
3. Donner toutes les occurrences du facteur aba dans $ababababa$.
4. Donner toutes les occurrences du sous-mot aba dans $ababababa$.
5. Soient L et L' des langages sur $\Sigma = \{a,b\}$; calculer $L.L' = \{ ww' \mid w \in L \text{ et } w' \in L' \}$ pour :
 - $L = \{a,ab,bb\}$ et $L' = \{\epsilon,b,aa\}$.
 - $L = \{\epsilon,ab,bba\}$ et $L' = \{\epsilon,b,aa\}$.
 - $L = \emptyset$ et $L' = \{b,aba\}$.
 - $L = \{\epsilon\}$ et $L' = \{b,aba\}$.
 - $L = \{aa,ab,ba\}$ et $L' = \Sigma^*$.
6. Montrer que le produit de langages est une opération associative.
7. Montrer que le produit de langages est une opération distributive par rapport à l'union.
8. Montrer que le produit de langages n'est pas distributif par rapport à l'intersection.
9. Vérifier que $\{\epsilon\}$ est élément neutre pour le produit de langages.
10. Montrer qu'il existe des alphabets Σ et Σ' tels que $(\Sigma \cup \Sigma')^* \neq \Sigma^* \cup \Sigma'^*$.
11. Montrer que pour tous alphabets Σ et Σ' , on a $(\Sigma \cup \Sigma')^* \supseteq \Sigma^* \cup \Sigma'^*$.
12. Démontrer que, quel que soit Σ , on a $(\Sigma^*)^* = \Sigma^*$.
13. Soit L un langage sur un alphabet Σ . Trouver l'ensemble des facteurs gauches et l'ensemble des facteurs droits des langages sur $\Sigma = \{a,b\}$ suivants :
 - $L_1 = \{a^n.b^n \mid n \geq 0\}$.
 - $L_2 = \{a^n.b^m \mid 0 \leq n \leq m\}$.
 - $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$.