

Algèbre et arithmétique – deuxième partiel

1 heure, calculatrice et documents interdits.

Question de cours (6 points). Soit n un entier. Montrer que les transpositions engendrent S_n , le groupe symétrique de degré n .

Exercice 1 On considère S_5 , le groupe symétrique de degré 5.

- 1) Lister les différentes décompositions en cycles à supports disjoints de S_5 .
- 2) Préciser quelles sont les permutations de A_5 ?
- 3) Donner les ordres des éléments de S_5 , puis des éléments de A_5 .
- 4) Soit G un groupe de cardinal n et k un diviseur de n . Existe-t-il forcément un élément d'ordre k dans G ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 Soit $\alpha = (123456) \in S_6$.

Donner les décompositions en cycles à supports disjoints, les ordres et les signatures des puissances α^k de α .

Exercice 3

Soit α et β deux cycles de S_n dont les supports s'intersectent en exactement un indice.

- 1) Montrer que $\alpha \circ \beta$ est un cycle dont on précisera la longueur.
- 2) Montrer que α et β ne commutent pas.

Pour cet exercice, une difficulté est d'introduire des notations cohérentes et compréhensibles.