

Ni calculatrices, ni documents. 1 heure.

Exercice I. (Cours, 6 points)

1. Soit a et b sont deux nombres entiers, soit d un diviseur commun à a et b . Montrer que d divise le pgcd de a et b .
2. Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de deux nombres entiers non-nuls a et b . Montrer que le pgcd de a et b est égal au pgcd de b et r .

Exercice II.

1. Soit a , b et c trois nombres entiers globalement premiers entre eux (c'est-à-dire que les seuls diviseurs communs à a , b et c sont 1 et -1). Montrer qu'il existe des entiers u , v et w tels que $ua + vb + wc = 1$.
2. Trouver de tels coefficients de BÉZOUT pour 6, 10 et 15.

Exercice III.

1. Donner toutes les solutions dans \mathbb{Z} de l'équation $5x + 7y = 1$.
2. Soit $s \in \mathbb{Z}$. Donner toutes les solutions dans \mathbb{Z} de l'équation $5x + 7y = s$
3. Montrer que dans un pays dans lequel il n'existe que des pièces de 5, 7 écus, il est possible de payer par pièces toutes les sommes de plus de 35 écus.
4. Quelle est la plus grande somme que l'on ne peut pas payer par pièces ?

Exercice IV.

1. Donner la liste des inversibles dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$.
2. Donner toutes les solutions de l'équation $\bar{x}^2 = \bar{1}$ dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$.