Exercice I. **1.** Écrire 61 en binaire (base 2), écrire 61 en hexadécimal (base 16), donner l'expression décimal du nombre qui s'écrit 210221 en base 3.

2. Notre-Dame de la Garde (latitude Nord : 43^o 17' 04" , longitude Est 5^o 22' 17"). Donner les coordonnées de la basilique en radians.

3. Montrer que pour tout entier n, 9 divise $10^n - 1$. En déduire qu'un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme des chiffres de son écriture décimal est divisible par 9.

Exercice II. **1.** Décomposer en produit de facteurs premiers 13215, 721, 1183.

2. Donner trois nombres qui ont exactement les mêmes diviseurs premiers et tels que aucun d'entre eux n'est multiple d'un des autres.

3. Donner toutes les pairs de nombres dont le pgcd est 143 et le ppcm est 6435.

Exercice III. **1.** Soit a, b, d trois entiers naturels. Montrer que si d divise $2a + b$ et $3a + 2b$ alors d divise a et b.

2. Trouver trois nombres entiers a, b, m strictement plus grand que 1 tels que m est multiple de $2a + b$ et $3a + 2b$ et m est premier avec a et b.

Exercice IV. On considère x et y deux entiers relatifs et d un diviseur commun. On note $x = dx_1$ et $y = dy_1$.

Montrer que $d = \text{pgcd}(x, y)$ si et seulement si x_1 et y_1 sont premiers entre eux.

Exercice V. **1.** Déterminer $\text{pgcd}(7696; 4144)$ de deux façons différentes : en utilisant l'algorithme d'Euclide et en utilisant la décomposition en facteurs premiers.

2. Déterminer $\text{ppcm}(7696; 4144)$.

Exercice VI. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et $m \geq 0$.

1. On suppose que a divise b dans $\mathbb{Z}$. Montrer que a^m divise b^m pour tout exposant m.

2. Soit p un nombre premier divisant a^m. Montrer que p divise a. Est-ce toujours vrai si p n'est pas premier ?

3. Démontrer que si a et b divisent c et si $\text{pgcd}(a, b) = 1$, alors ab divise c. Est-ce que c'est encore vrai si $\text{pgcd}(a, b) \neq 1$?

Exercice VII. On appelle **nombres premiers jumeaux** un couple $(p, p + 2)$ formé de deux nombres premiers.

1. Donner 4 exemples de tels couples.

2. Démontrer que si p est un nombre premier ≥ 5 tel que $p + 2$ soit également premier alors $p + p + 2$ est divisible par 12.

3. Existe-t-il trois nombres premiers de la forme $p, p + 2, p + 4$?

Exercice VIII. On se donne $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des nombres premiers. Montrer que le nombre

$q = (p_1 p_2 \cdots p_n) + 1$ n'est divisible par aucun des p_i. En déduire une démonstration de l'infinité des nombres premiers (c'est ainsi qu'a raisonné Euclide).

Exercice IX. **1.** Donner la liste des diviseurs de 3528.

2. Soit $a = 2^3 \times 3^2 \times 13^2$.

a. Calculer le nombre de diviseurs de a sans les écrire.

b. Ecrire la forme générale d'un diviseur de a. Donner alors une expression factorisée de la somme des diviseurs de a.

3. Généraliser les deux questions précédentes pour $b = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_n^{\alpha_n}$ où les p_i sont premiers et distincts deux à deux et les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

Exercice X. On appelle **nombre parfait** un entier naturel n tel que la somme de ses diviseurs stricts soit égale à lui-même. Par exemple, $6 = 1+2+3$ et $28 = 1+2+4+7+14$ sont des nombres parfaits.

Soit p un nombre tel que $2^p - 1$ soit premier. Montrer que $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait.

Exercice XI. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\text{pgcd}(14a+3, 21a+4) = 1$ et $\text{pgcd}(9a+4, 2a-1) \in \{1; 17\}$.

Exercice XII. **1.** Montrer qu'il n'existe pas d'entiers a et b premiers entre eux tels que $a^2 = 2b^2$. Que pouvez-vous en déduire concernant le nombre $\sqrt{2}$?

2. Montrer que $\frac{\ln 7}{\ln 5}$ est irrationnel.

Exercice XIII.

On appelle *Nombre de Fermat* un entier de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$, où $n \geq 0$ est un entier.

i) Calculer F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4. Montrer qu'ils sont premiers.

ii) Montrer que 641 divise F_5 (on doit ce résultat à Euler. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat).

iii) Si $2^m + 1$ est un nombre premier, montrer que $m = 2^n$ (donc que $2^m + 1$ est un nombre de Fermat).

Exercice XIV. **1.** Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) $ax + by = 1$.

a. Montrer que si (x_0, y_0) est une solution particulière de (E) alors l'ensemble des solutions de (E) est $\{(x_0 - kb, y_0 + ka) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation $314x - 159y = 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, l'équation $39x + 21y = 6$.

Consultez régulièrement la page `http://www.latp.univ-mrs.fr/~coulbois/2008/alg-arith/`