Université Paul Cézanne
Aix-Marseille III

MA402
2008-2009

TD4

Exercice 1:

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. Soit $\mathcal{N}$ la norme de $\mathbb{Z}[i]$, cést-à-dire l'application $\mathcal{N} : \mathbb{Z}[i] \mapsto \mathbb{Z}$ qui a $z \in \mathbb{Z}[i]$ fait correspondre $\mathcal{N}(z) = z\overline{z}$. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, on a $\mathcal{N}(xy) = \mathcal{N}(x)\mathcal{N}(y)$. Est-elle un morphisme d'anneau?
3. Déterminer les unités de $\mathbb{Z}[i]$.
4. Déterminer les irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 2:
Même exercice que précédemment avec $Z[j]$ où $j = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 3:
Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un anneau unitaire pour les lois d'addition et de compositions des applications. Quelles sont les unités de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Est-il commutatif?

Exercice 4:
Montrer que $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni des lois d'addition et de multiplication des applications est un anneau unitaire. Est-il commutatif? Montrer que l'ensemble

$$F_0 = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, R) \mid f(0) = 0\}$$

est un idéal de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 5:
Soit A un intègre fini. Montrer que A est un corps.

Exercice 6:
Soit $\mathbb{K}, \mathbb{K}'$ deux corps et f un isomorphisme d'anneaux non-nul entre $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, on a $f(x^{-1}) = \frac{1}{f(x)}$.

Exercice 7:
Soit A un anneau principal.

1. Enoncer ce que pourrait être une décomposition en facteurs irréductibles d'un élément de A.
2. Montrer l'existence et l'unicité de la décomposition en facteurs irréductibles dans A.

Exercice 8:

Soit A un anneau intègre. On dit que A est un anneau euclidien s'il existe une application $\varphi : A \mapsto \mathbb{N}$ (appelé *stathme euclidien*) vérifiant la propríété suivante:

$$\text{pour tout } a, b \in A \text{ il existe } q, r \in A \text{ tels que } a = bq + r \text{ avec } \varphi(r) < \varphi(b).$$

1. Donner un exemple d'anneau euclidien.
2. Montrer qu'un anneau euclidien est un anneau principal.

Exercice 9:

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien.
2. Soit $x, y \in \mathbb{Z}$. Factoriser $x^2 + y^2$ dans $\mathbb{Z}[i]$.
3. Résoudre l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 10:

Soit A un anneau. On appelle *caractéristique de A* le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ (s'il existe) tel que pour tout $x \in A$, on a $nx = 0$. Si un tel entier n'existe pas, on dit que A est de caractéristique 0.

1. Donner un exemple d'anneau de caractéristique 0.
2. Donner la caractéristique de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Donner la caractéristique de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
4. Montrer que la caractéristique d'un corps est soit 0 soit un nombre premier p. Donner un exemple de corps de caractéristique 0 et un exemple de corps de caractéristique p.