MA 404. SÉRIES ENTIÈRES ET SÉRIES DE FOURIER

NOTES DE COURS (2009)

1. Rayon de convergence

1.1. **Séries entières.**

Introduction aux séries entières $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$ à coefficients a_n réels ou complexes. Notation : $\sum a_nx^n$. Avec la somme et le produit des séries :

Somme : $\sum a_nx^n + \sum b_nx^n = \sum(a_n + b_n)x^n$.

Produit : $\sum a_nx^n \times \sum b_nx^n = \sum c_nx^n$

$$\text{où} \quad c_n = \sum_{i=0}^{n} a_ib_{n-i}.$$

1.2. **Convergence.** On remplace la lettre x par un nombre (réel ou complexe). On obtient une série numérique dont on détermine alors la convergence.

Théorème. *Soit $\sum a_nx^n$ une série entière, trois cas peuvent se produire :*

1. *La série ne converge que pour $x = 0$.*
2. *Il existe un réel $R > 0$, tel que*
   - (a) *pour $|x| < R$, la série converge absolument,*
   - (b) *pour $|x| > R$, la série diverge.*
3. *La série converge partout (la convergence est absolue).*

Définition. Le réel R s'appelle le *rayon de convergence* de la série. Dans le cas où la série ne converge que pour $x = 0$, on convient que $R = 0$. Dans le cas où la série converge partout on convient que $R = \infty$.

Dans le cas complexe, la série converge absolument à l'intérieur du disque de rayon R (et diverge à l'extérieur du disque). Dans le cas réel la série converge dans l'intervalle $]-R, +R[$. Le comportement aux bornes (ou sur le cercle de rayon R, dans le cas complexe) dépend de la série considérée.

1.3. **Convergence absolue.** Rappel sur le convergence absolue. Pour démontrer le théorème on établit le lemme suivant :

Lemme. *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière. Si* x_0 *est tel que l'ensemble* $\{|a_n x_0^n|, n \in \mathbb{N}\}$ *est borné, alors pour tout* x *tel que* $|x| < |x_0|$*, la série converge absolument en* x*.*

Si la série converge en x_0, alors le terme général $a_n x_0^n$ tend vers zéro (lorsque n tend vers l'infini), a fortiori il reste borné et la conclusion demeure.

1.4. **Calcul du rayon de convergence.**

Corollaire. *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière. Si*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l, \quad \text{alors} \quad R = 1/l,$$

avec $R = \infty$ *pour* $l = 0$*, et* $R = 0$ *pour* $l = \infty$*.*

Remarque. On pourrait aussi bien dire qu'on a

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$