MA 404. SÉRIES ENTIÈRES ET SÉRIES DE FOURIER

NOTES DE COURS (2009)

2. Convergence uniforme

2.1. **Suite de fonctions.**

On considère une suite (f_n) de fonctions (de la variable réelle). En un point $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$ est un nombre, on obtient une suite numérique. On dit que le suite *converge simplement* dans une partie I de $\mathbb{R}$ (le plus souvent I est un intervalle) si en tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))$ est convergente. La suite de fonctions (f_n) définit alors une fonction f (définie sur l'ensemble I) dont la valeur $f(x)$ en x est la limite de la suite numérique $(f_n(x))$:

$$\forall x \in I, f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

La convergence simple présente quelques inconvénients : il se peut que les fonctions f_n soient toutes continues et que la fonction limite f ne le soit pas.

Example. On considère les fonctions $f_n(x) = \cos^{2n}(\pi x)$. Elles sont continues. Cependant,
• pour $x \neq k, k \in \mathbb{Z}$, on a $|\cos(\pi x)| < 1$, donc $\lim_{n\to\infty} \cos^{2n}(\pi x) = 0$,
• pour $x = k, k \in \mathbb{Z}$, on a $|\cos(\pi x)| = 1$, donc $\lim_{n\to\infty} \cos^{2n}(\pi x) = 1$,
la fonction limite présente donc un point de discontinuité en tout entier.

On introduit donc la notion de *convergence uniforme*.

Définition. On dit qu'une suite (f_n) de fonctions (de la variable réelle) converge uniformément sur une partie I de $\mathbb{R}$ vers la fonction f (définie sur I) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, n \geq N \Longrightarrow \forall x \in I, |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Si la suite (f_n) converge uniformément vers f, alors a fortiori, en tout $x \in I$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ (autrement dit la convergence uniforme implique la convergence simple). Mais la convergence uniforme est plus forte et garantit un bon comportement pour la continuité de la limite :

Théorème. *Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur un intervalle I vers la fonction f et si les f_n sont continues, alors f est continue.*

2.2. **Série de fonctions.**

Si on considère maintenant une série $\sum f_n$ de fonctions, la convergence en un point x est celle de la série numérique $\sum f_n(x)$, soit de la suite des somme partielles $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$. On dit que la série *converge simplement* dans une partie I de $\mathbb{R}$ vers f, si en tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente de somme $f(x)$:

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x).$$

On dit que la convergence de la série est *uniforme* sur I si la suite des sommes partielles converge uniformément vers f. Le théorème précédent s'applique immédiatement aux séries :

Corollaire. *Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur un intervalle I, et si les f_n sont continues, alors la somme $f = \sum_0^\infty f_n$ est continue.*

On a le critère suivant :

Proposition. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions. Si, on a*

$$\forall x \in I, |f_n(x)| < \alpha_n$$

où α_n est le terme général d'une série (à termes positifs) convergente, alors la série est absolument et uniformément convergente sur I.

2.3. **Convergence uniforme des séries entières.**

Du critère précédent de convergence des séries de fonctions on tire la convergence uniforme des séries entières sur tout intervalle fermé strictement contenu dans l'intervalle de convergence :

Proposition. *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *Alors, pour tout* K *tel que* $0 < K < R$, *la série converge uniformément dans l'intervalle* $[-K, +K]$.

Remarque. Cependant, la convergence n'est en général pas uniforme dans l'intervalle $]-R, +R[$.

Comme les monômes $a_n x^n$ sont des fonctions continues, on déduit le corollaire suivant.

Corollaire. *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *Alors, la somme de la série est une fonction continue dans l'intervalle* $]-R, +R[$.

2.4. **Théorème d'Abel.**

En fait, si la série converge en $x = R$ (resp. $x = -R$, resp. $x = R$ et $x = -R$), la somme de la série est continue dans l'intervalle fermé à droite $]-R, +R]$ (resp. dans l'intervalle fermé à gauche $[-R, +R[$, resp. dans l'intervalle fermé $[-R, +R]$). Cela résulte du théorème d'Abel:

Théorème. *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière, convergente pour* $|x| < 1$, *de somme* $s(x)$. *Si la série numérique* $\sum a_n$ *est convergente, de somme* s, *alors* s *est la limite de la fonction* $s(x)$ (*à gauche*) *en* $x = 1$ *:*

$$s = \lim_{x \to 1, x < 1} s(x).$$

Application : On verra qu'on a

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad R = 1.$$

On tire la fameuse formule

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots.$$

2.5. **Intégration terme à terme.**

Proposition. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers* f *dans un intervalle* $[a, b]$. *Alors on a*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx \right).$$

Corollaire. *Soit* $\sum u_n$ *une suite de fonctions continues qui converge uniformément dans un intervalle* $[a, b]$*, de somme* u*. Alors on a*

$$\int_a^b u(x)dx = \sum_0^\infty \left(\int_a^b u_n(x)dx \right).$$

Corollaire. *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$*, de somme* u *dans l'intervalle de convergence. Alors pour tout intervalle* $[a, b]$ *tel que* $-R < a < b < R$*, on a*

$$\int_a^b u(x)dx = \sum_0^\infty \left(\int_a^b a_n x^n dx \right).$$