MA 404. SÉRIES ENTIÈRES ET SÉRIES DE FOURIER

NOTES DE COURS (2009)

3. Fonctions analytiques

3.1. **Intégration, dérivation des séries entières.**

Définition. Soit $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$ une série entière.

- Sa *série primitive* est la série entière

$$a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \ldots,$$

- Sa *série dérivée* est la série entière

$$a_1 + 2a_2x + \ldots + a_nx^{n-1} + \ldots$$

Remarque. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, la série

$$c + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \ldots$$

peut aussi être considérée comme *une* série primitive.

Proposition. *Soit $\sum a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, de somme $s(x)$. Alors sa série primitive a même rayon de convergence, sa somme est une primitive de la fonction $s(x)$.*

Corollaire. *Soit $\sum a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, de somme $s(x)$. Alors sa série dérivée a même rayon de convergence, sa somme est la dérivée $s'(x)$.*

Corollaire. *Soit $\sum a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, de somme $s(x)$. Alors la fonction $s(x)$ est infiniment dérivable dans l'intervalle $]-R, +R[$.*

Application La série $1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ est partout convergente. On voit qu'elle est égale à sa série dérivée. Sa somme est donc solution de l'équation différentielle $y' = y$, d'où $y = \lambda e^x, \lambda \in \mathbb{R}$. On détermine la constante λ en calculant la somme pour $x = 0$. On obtient $\lambda = 1$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \ R = \infty$$

3.2. **Opération sur les séries.**

- On obtient de nouveaux développements en séries par substitution : Substituant $-x$ à x puis x^2 à x dans la série géométrique, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,\\ \frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots,\\ \frac{1}{1+x^2} &= 1-x^2+x^4+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots,\end{aligned}$$

toutes de rayon $R = 1$ (on observe que $x^2 < 1$, si et seulement si $|x| < 1$).
Par intégration, on tire

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

toujours de rayon $R = 1$ (en effet, la série primitive a même rayon de convergence).

- On obtient de nouveaux développements en série entière en faisant la somme et le produit de séries convergentes. Ainsi, partant des développements de e^x et e^{-x} (obtenu par substitution), soit

$$\begin{aligned}e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\\ e^{-x} &= 1-x+\frac{x^2}{2}\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots,\end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient les développements en série du sinus et du cosinus hyperbolique :

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{e^x-e^{-x}}{2} = x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\\ \cosh(x) &= \frac{e^x+e^{-x}}{2} = 1+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3.3. **Série de Maclaurin.**

Partant d'une série, sa somme est une fonction (dans l'intervalle de convergence). Inversement, partant d'une fonction f définie dans un voisinage de l'origine, on pose chercher à représenter f par la somme d'une série dans un voisinage de 0 (éventuellement plus petit que le voisinage initial)

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,\ |x| < r$$

(r est éventuellement strictement inférieur au rayon R de convergence).

Plus généralement on pose la définition suivante.

Définition. On dit qu'une fonction f est *analytique au voisinage de* $x_0 \in \mathbb{R}$ si

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots,\ |(x-x_0)| < r.$$

Posant $y = x - x_0$, on se ramène à développer $f(x+y)$ au voisinage de l'origine. Dans la suite on conviendra qu'on a $x_0 = 0$.

Comme la somme d'une série entière est infiniment dérivable, une fonction analytique est infiniment dérivable. En outre sa dérivée est la somme de la série dérivée, sa dérivée seconde la somme de la série dérivée de la série dérivée, etc. La série qui représente f est donc unique, de coefficients

$$a_0 = f(0),\ a_1 = f'(0),\ a_2 = \frac{f"(0)}{2},\ \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \ldots$$

Définition. Soit f une fonction infiniment dérivable dans un voisinage de l'origine. La *série de Maclaurin associée à* f est la série entière

$$f(0) + f'(0)x + f"(0)\frac{x^2}{2} + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

Remarque. La série de Maclaurin peut ne pas converger dans tout le voisinage où la fonction f est infiniment dérivable ; si elle converge, sa somme peut différer de $f(x)$.

On donne une condition suffisante pour que la série de Maclaurin soit de somme $f(x)$.

Proposition. *Soit f une fonction infiniment dérivable dans un intervalle ouvert I. On suppose que les dérivées successives de f sont uniformément bornées dans l'intervalle fermé $[-r, +r] \subsetneq I$:*

$$\exists M, \forall n, \forall x \in [-r, +r],\ |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Alors la série de Maclaurin de f converge vers f(x) pour tout x dans l'intervalle $[-r, +r]$:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!},\ \text{pour } |x| \leq r.$$

En particulier, on peut appliquer ce résultat aux fonctions sinus et cosinus partout bornés par 1, ainsi que leurs dérivées. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3.4. **L'exponentielle complexe.**

La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est de rayon de convergence $R = \infty$, de somme e^x. Elle permet de définir l'exponentielle complexe.

Définition. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots.$$

En particulier, pour $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{iy} = 1 + iy + -\frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} \ldots.$$

On tire la relation

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y).$$

En particulier, pour $y = \pi$, on obtient la célèbre formule d'Euler :

$$e^{i\pi} = -1.$$

On tire aussi

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \\ \cos(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}. \end{aligned}$$

On note une nouvelle analogie avec les fonctions hyperboliques.

L'exponentielle complexe est partout absolument convergente. Le produit de e^a et e^b est donc la somme de la série produit :

Proposition. *Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on a*

$$e^{a+b} = e^a e^b.$$

Corollaire. *Pour $z = x + iy$, on a*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \left(\cos(y) + i\sin(y)\right).$$

En particulier, on a $|e^z| = e^x$ et l'argument de e^z est y.
Enfin $e^{z+2ik\pi} = e^z$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.