# MA 404. SÉRIES ENTIÈRES ET SÉRIES DE FOURIER

NOTES DE COURS (2009)

## 4. Séries de Fourier

### 4.1. Série trigonométrique.

**Définition.** *Une série de Fourier* (sous forme trigonométrique) est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n\geq 0} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

où $a_n$ et $b_n$ sont des coefficients réels.

Notons qu'on peut aussi écrire une telle série sous la forme

$$a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

(pour $n = 0$, $\cos(nx) = 1$ et $\sin(nx) = 0$.)

*Période.* Lorsqu'elle converge, la somme est une fonction périodique de période $2\pi$. Inversement un développement en série de Fourier permet d'exprimer une fonction périodique de période $2\pi$.

Pour étudier une fonction de période $T$, on fait un changement de variable : Si $f(y)$ est périodique de période $2\pi$, alors $g(x) = f\left(\frac{2\pi x}{T}\right)$ est périodique de période $T$. Pour une fonction de période $T$, on cherchera donc un développement en série de Fourier sous la forme

$$\sum_{n\geq 0} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right).$$

*Série de sinus.* On peut aussi écrire une série de Fourier sous la forme

$$a_0 + \sum_{n\geq 1} d_n \sin(nx + \varphi_n).$$

La formule

$$\sin(nx + \varphi_n) = \sin(nx)\cos(\varphi_n) + \cos(nx)\sin(\varphi_n)$$

permet d'établir qu'on a

$$\begin{cases} d_n \sin(\varphi_n) = a_n \\ \\ d_n \cos(\varphi_n) = b_n \end{cases}$$

On tire

$$\begin{cases} d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \\ \varphi_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \; (\varphi_n = \frac{\pi}{2}, \text{ si } b_n = 0). \end{cases}$$

4.2. **Forme complexe.**

On peut aussi présenter une série de Fourier sous *forme complexe* :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx},$$

où les $c_n$ sont des coefficients complexes.

On dit qu'un telle série converge si chacune des séries $\sum_{n \geq 0} c_n e^{inx}$ et $\sum_{n \geq 0} c_{-n} e^{-inx}$ converge. Sa somme (si elle existe) est une fonction périodique de période $2\pi$ *à valeur complexes* $f(x) = a(x) + ib(x)$.

**Remarque.** Si la série converge, de somme $f(x)$, on a

$$f(x) = \sum_0^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_1^{\infty} c_{-n} e^{-inx}.$$

Il en résulte qu'on a alors aussi

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

On note cependant que le membre de droite peut avoir une limite même si aucune des séries $\sum_{n \geq 0} c_n e^{inx}$ et $\sum_{n \geq 0} c_{-n} e^{-inx}$ n'est convergente. C'est le cas par exemple, si $c_n = \frac{1}{n}$ (pour $n \neq 0$), en effet pour $x = 0$, les séries $\sum_{n \geq 0} c_n e^{inx}$ et $\sum_{n \geq 0} c_{-n} e^{-inx}$ sont alors respectivement la série harmonique et son opposée.

On passe de la forme complexe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, à la forme trigonométrique classique $a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ en rappelant la relation $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$.

On obtient les formules

$$\begin{cases} a_0 = c_0, \\ a_n = c_n + c_{-n}, \quad \text{pour } n \geq 1, \\ b_n = i(c_n - c_{-n}). \end{cases}$$

On tire les formules inverses

$$\begin{cases} c_0 = a_0, \\ c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad \text{pour } n \geq 1, \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Pour une fonction $f(x)$ (périodique de période $2\pi$) developable en série de Fourier, on a

**Corollaire.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *La fonction $f(x)$ est à valeurs réelles,*
(2) *pour tout $n$, les coefficients $a_n$ et $b_n$ sont réels,*
(3) *pour tout $n$, $c_n = \overline{c_{-n}}$.*

4.3. **Calcul des coefficients de Fourier.**

Si on a convergence uniforme de la série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx},$$

on a alors aussi convergence uniforme après multiplication par $e^{-inx}$ (de module 1).

$$f(x)e^{-inx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{i(k-n)x}.$$

On peut donc faire une intégration terme à terme :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)e^{-inx}dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(k-n)x}dx.$$

Or on a

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(k-n)x}dx = \begin{cases} 0, & \text{pour } n \neq k, \\ 2\pi, & \text{pour } n = k. \end{cases}$$

On tire

$$\boxed{c_n = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)e^{-inx}dx.}$$

Notons qu'on a en particulier

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx.$$

Les formules de passage de la forme complexe à la forme réelle donnent alors

$$\begin{cases} a_0 = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx, \\ a_n = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad \text{pour } n \geq 1, \\ b_n = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

**Remarque.** Comme pour la série de Maclaurin associée à une fonction (infiniment dérivable), la série de Fourier associée à une fonction $f(x)$ (périodique de période $2\pi$) n'est pas nécessairement convergente et ne converge pas nécessairement vers $f(x)$. Notons qu'en particulier deux fonctions distinctes peuvent avoir la même série de Fourier. En effet on peut calculer des coefficients de Fourier pour toute fonction continue par morceaux (plus généralement toute fonction pour laquelle on a une intégrale) et on ne change pas ces coefficients en modifiant un nombre fini de valeurs de la fonction.