MA 404. SÉRIES ENTIÈRES SÉRIES DE FOURIER

PLANCHE DE TD N1 (2009)

Exercice I. Déterminer la convergence de la série numérique de terme général u_n dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ b) $u_n = \frac{n!}{n^n}$ c) $u_n = \frac{n^n}{n!}$ d) $u_n = \frac{1!+2!+...+n!}{(n+2)!}$.

Exercice II. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ de coefficient général a_n dans chacun des cas suivants (avec $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$) :

a) $a_n = \frac{n!}{(n+1)^n}$ b) $a_n = \frac{n^{2n}}{(2n)!}$ c) $a_n = \frac{a^n}{n}$ d) $a_n = \frac{1}{\sinh(na)}$.

Petit problème.

1. On note U la série numérique de terme général u_n, V la série numérique de terme général v_n et $U+V$ la série numérique de terme général $u_n + v_n$.

(1) Montrer que si U et V sont convergentes alors $U+V$ est convergente.
(2) Montrer que si l'une des séries U, V est convergente et l'autre est divergente, alors $U+V$ est divergente.
(3) Donner un exemple où U et V sont divergentes mais $U+V$ est convergente.
(4) Montrer que si U ou V est divergente et que les deux séries sont à termes positifs, alors $U+V$ est divergente.

2. On note A la série entière $A = \sum a_n x^n$ de coefficient général a_n, B la série entière $B = \sum b_n x^n$ de coefficient général b_n et $A+B$ la série entière $A = \sum (a_n + b_n) x^n$ de coefficient général $a_n + b_n$. Pour toute série entière S on note $R(S)$ le rayon de convergence de S.

(1) Montrer la relation $R(A+B) \geq \inf\{R(A), R(B)\}$.
(2) Montrer que si $R(A) \neq R(B)$ on a alors la relation $R(A+B) = \inf\{R(A), R(B)\}$.
(3) On suppose que A et B sont à coefficients a_n et b_n positifs. Montrer qu'on a alors la relation $R(A+B) = \inf\{R(A), R(B)\}$.
(4) Donner un exemple où $R(A+B) > \inf\{R(A), R(B)\}$.