

MA 404. SÉRIES ENTIÈRES ET SÉRIES DE FOURIER

PLANCHE DE TD N2 (2009)

Exercice I. Étudier le rayon de convergence des séries entières définies par leur terme général $a_n x^n$ dans chacun des cas suivants :

- a) $\left(\frac{x}{n}\right)^n$ b) $n(n-1)x^n$ c) $n(n-1)\dots(n-k)x^n, k \in \mathbb{N}$ d) $n!x^n$
e) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$ f) $\frac{x^n}{n3^n}$ g) $\frac{\ln n}{n}x^n$

Exercice II. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières par leur terme général $a_n x^n$ dans chacun des cas suivants :

- a) $\frac{x^n}{n(n-1)}$ b) $\frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$ c) x^{3n} d) $(-1)^n \frac{nx^n}{n+1}$ e) $\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ f) $\frac{x^n}{n3^n}$
g) $\frac{x^n}{n^2}$.

Exercice III. Développer en série entière les fonctions suivantes en indiquant le rayon de convergence :

- a) $\frac{1}{2+x}$ b) $\ln(2+x)$ c) $\sin^2(x)$ d) $\frac{1+x^2}{(1-x)^3}$ e) $\frac{1+2x}{1+x+x^2}$ f) $\cosh(x)$
g) $\arctan(x^3)$.