MA 404. SÉRIES ENTIÈRES ET SÉRIES DE FOURIER

PLANCHE DE TD N3 (2009)

Exercice I. Développer en série entière les fonctions suivantes en indiquant le rayon de convergence :

a) $\cosh(x)\cos(x)$ b) $\ln(1+x+x^2)$ c) $(1+x)\sin(x)$.

Exercice II. On veut trouver la solution de l'équation différentielle $2y' + y = 0$ telle que $y(0) = 2$. On la cherche sous la forme d'une fonction developable en série entière, soit $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$.

(1) Calculer a_0.

(2) Montrer qu'on la relation $2(n+1)a_{n+1} + a_n = 0$.

(3) Exprimer a_n en fonction de n.

(4) Conclure qu'on a $f(x) = 2e^{-x/2}$.

Exercice III. On donne la série entière de terme général $\frac{x^{3n}}{(3n)!}$, soit

$$1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + ...$$

(1) Montrer que cette série est partout convergente.

(2) Soit $f(x)$ la somme de la série. Montrer que f est telle que $f^{(3)} = f$.

(3) Montrer que pour toute solution de l'équation différentielle $y^{(3)} = y$ de la forme $e^\lambda x$, on a $\lambda^3 = 1$.

(4) On pose $j = -1/2 + i\sqrt{3}/2$. On rappelle que $j^3 = 1$. Calculer $1 + j + j^2$.

(5) Développer les fonctions e^{jx} et e^{j^2x} en série entière (séries complexes).

(6) Développer les fonctions $e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2)$ et $e^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2)$ en série entière.

(7) Montrer qu'on a $f(x) = \frac{1}{3}\left(e^x + e^{jx} + e^{j^2x}\right)$.

(8) Conclure qu'on a $f(x) = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2)$.

Exercice IV. On définit la fonction $f(x)$ par

$$\begin{cases} f(x) = e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que f est dérivable en tout $x \neq 0$. Calculer sa dérivée.

(2) Montrer que f est infiniment dérivable en tout $x \neq 0$. Montrer que la dérivée $n^{ème}$ est de la forme $f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} e^{-1/x^2}$ où p_n, q_n sont des polynômes.

(3) Calculer la limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$. En déduire que f est dérivable en 0.

(4) Calculer la limite $\lim_{h \to 0} \frac{f'(h)}{h}$. En déduire que f' est dérivable en 0.

(5) Montrer que f est partout infiniment dérivable. Montrer qu'on a $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.

(6) Montrer que la série de Maclaurin de f est partout convergente mais de somme $s(x)$ partout différente de $f(x)$, sauf en $x = 0$.