# MA 404. SÉRIES ENTIÈRES ET SÉRIES DE FOURIER

PLANCHE DE TD N4 (2009)

**Exercice I.** Donner une indication du graphe et développer en série de Fourier les fonctions périodiques de période $2\pi$ définies sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ de la manière suivante :

a) $f(x) = x$, b) $f(x) = x^2$, c) $f(x) = e^x$, d)$f(x) = \sinh x$.

**Exercice II.** Donner une indication du graphe et développer en série de Fourier les fonctions *paires* et périodiques de période $2\pi$ définies sur l'intervalle $[0, \pi]$ de la manière suivante :

a) $f(x) = x$, b) $f(x) = x^2$, c) $f(x) = e^x$, d) $f(x) = \sinh x$.

**Exercice III.** Donner une indication du graphe et développer en série de Fourier les fonctions *impaires* et périodiques de période $2\pi$ définies sur l'intervalle $[0, \pi]$ de la manière suivante :

a) $f(x) = 1$, b) $f(x) = x^2$, c) $f(x) = e^x$, d)$f(x) = \sinh x$.

**Exercice IV.** On donne un réel $\alpha$, tel que $|\alpha| < 1$.

(1) Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \cos nx$ est absolument convergente, de somme $S(x)$ telle que $|S(x)| \leq 2$ pour tout $x$.

(2) Plus généralement montrer que les séries trigonométriques $\sum_{n\geq 0} \alpha^n \cos nx$ et $\sum_{n\geq 0} \alpha^n \sin nx$ sont uniformément et absolument convergentes, trouver un majorant uniforme de leurs sommes.

(3) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \alpha^n e^{inx}$ est convergente et calculer sa somme (en fonction de $\alpha$ et de $x$).

(4) Développer en série de Fourier les fonctions

$$f(x) = \frac{1 - \alpha \cos x}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sin x}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x}.$$

Montrer que pour chacune, la série de Fourier converge uniformément et absolument vers la fonction donnée.

(5) Développer en série de Fourier la fonction

$$h(x) = \frac{\sin x}{3 - 2\cos x}$$

montrer que la série de Fourier converge uniformément et absolument vers la fonction $h(x)$.

**Exercice IV.** On définit la fonction $f(x)$ par

$$\begin{cases} f(x) = e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que $f$ est dérivable en tout $x \neq 0$. Calculer sa dérivée.

(2) Montrer que $f$ est infiniment dérivable en tout $x \neq 0$. Montrer que la dérivée $n^{ème}$ est de la forme $f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} e^{-1/x^2}$ où $p_n, q_n$ sont des polynômes.

(3) Calculer la limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$. En déduire que $f$ est dérivable en 0.

(4) Calculer la limite $\lim_{h \to 0} \frac{f'(h)}{h}$. En déduire que $f'$ est dérivable en 0.

(5) Montrer que $f$ est partout infiniment dérivable. Montrer qu'on a $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n$.

(6) Montrer que la série de Maclaurin de $f$ est partout convergente mais de somme $s(x)$ partout différente de $f(x)$, sauf en $x = 0$.