Université d'Aix-Marseille III – Faculté des Sciences et Techniques de Saint-Jérôme
M7 – Mathématiques de l'Informatique (2002/2003)

Correction de la Feuille d'exercices n°1 (Partie 1)

Alphabet : Ensemble fini non vide de symboles noté V (ex : V={a, b, …, z}).
On note V^* l'ensemble des mots possibles sur V y compris ε.
On note V^+ l'ensemble $V^* \setminus \varepsilon$.

Mot : Un mot sur un alphabet V est une suite finie de lettres de V.
Exemple : V={a, b, c} m=aabcaccb est un mot.

Sous-mot : m est sous-mot de u s'il est constitué d'une suite de lettres de u (dans le même ordre que dans u).
Exemple : u=aabc alors m=abc ou m=ac ou …

Facteur : $m_1 \in V^*$ est facteur de $m_2 \in V^*$ si
$\exists\, z_1, z_2 \in V^*$ tel que $m_2=z_1\, m_1\, z_2$
m_1 est **facteur propre** si $z_1 \neq \varepsilon$ et $z_2 \neq \varepsilon$.
m_1 est **facteur initial (ou préfixe)** si $z_1 = \varepsilon$.
m_1 est **facteur final (ou suffixe)** si $z_2 = \varepsilon$.

1) Sq = ACCTG
Soit N l'ensemble des sous-mots de Sq (il s'agit de trouver un « chemin » à l'intérieur du mot Sq en partant d'une lettre pour arriver à une autre sachant que les sauts sont autorisés).
N = { A, AC, ACC, ACCT, ACCTG, AT, ATG, C, CC, CCT, CCTG, CT, CTG, T, TG, G, AG, CG }

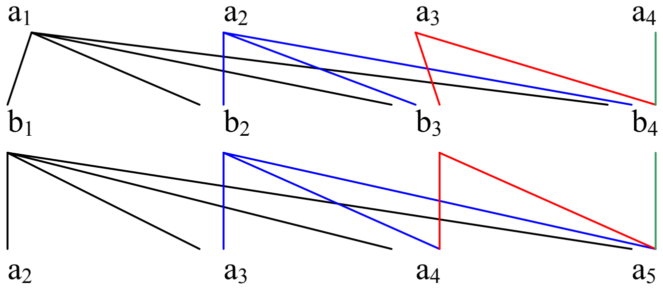
2) m = bcac
Soit N l'ensemble des facteurs de m.
N = { ε, b, bc, bca, bcac, c, ca, cac, a, ac }

3) Occurrences du facteur TATA dans Sq = ATATATACGTATAT
Il y a : ATATATACGTATAT, ATATATACGTATAT, et ATATATACGTATAT
Donc 3 occurrences.

4) Idem 3

5) Occurrences du sous-mot aba dans ababababa

En numérotant les a de 1 à 5 et les b de 1 à 4 : $a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5$



Il y a donc 20 sous-mots possibles (20 occurrences de aba dans ababababa).

On appelle **langage formel** sur un alphabet V le sous-ensemble de mots $L \subseteq V^*$ formé de symboles de V. (ex : $V = \{ a, b \}$ $L = \{ a, aa, ab, bab \}$ $L_2 = \{ \in, a \}$.

Opérations sur les langages :

Intersection : $L_3 = L_1 \cap L_2 = \{ x \in V^* / x \in L_1 \text{ et } x \in L_2 \}$

Union : $L_3 = L_1 \cup L_2 = \{ x \in V^* / x \in L_1 \text{ ou } x \in L_2 \}$

Différence : $L_3 = L_1 - L_2 = \{ x \in V^* / x \in L_1 \text{ et } x \notin L_2 \}$

Concaténation (ou Produit) : $L_3 = L_1 \bullet L_2 = \{ m_1m_2 / m_1 \in L_1 \text{ et } m_2 \in L_2 \}$

Exemples : $V = \{ a, b \}$ $L_1 = \{ ab, aa \}$ $L_2 = \{ aa, ba \}$

$L_3 = L_1 \cap L_2 = \{ aa \}$

$L_4 = L_1 \cup L_2 = \{ ab, aa, ba \}$

$L_5 = L_1 - L_2 = \{ ab \}$ $L_6 = L_2 - L_1 = \{ ba \}$

---

6) $X = \{ a, b \}$

$A \bullet B = \{ uv / u \in A \text{ et } v \in B \}$

Dans les concaténations suivantes, les lettres issues de A seront en rouge et celles de B en noir.

a) $A = \{ b, ab, aa \}$ et $B = \{ \varepsilon, b, aa \}$

$A \bullet B = \{ b, ab, aa, bb, abb, aab, baa, abaa, aaaa \}$

b) $A = \varnothing$ et $B = \{ baba, bb, ab, aaa \}$

$A \bullet B = \varnothing$

c) $A = X$ et $B = \{ a, ba, bb \}$

$A \bullet B = \{ aX, baX, bbX \}$

Autre notation : $A \bullet B = X^* \backslash \{ \varepsilon, a, b, bb \}$

d) $A = \{ \varepsilon \}$ et $B = \{ \varepsilon \}$

$A \bullet B = \{ \varepsilon \}$

e) $A = \{ \varepsilon, ab, baa \}$ et $B = \{ \varepsilon, a, bb \}$

$A \bullet B = \{ \varepsilon, a, bb, ab, aba, abbb, baa, baaa, baabb \}$

7) Le produit de langages est une opération associative ?

Soient L_1, L_2, et $L_3 \subseteq V^*$ trois langages.

Montrons que $L_1 \bullet (L_2 \bullet L_3) = (L_1 \bullet L_2) \bullet L_3$

a) $\Rightarrow$ Montrons que $L_1 \bullet (L_2 \bullet L_3) \subset (L_1 \bullet L_2) \bullet L_3$

Soit $X \in L_1 \bullet (L_2 \bullet L_3)$ alors $\exists\, x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ et $x_3 \in L_3$ tels que :

$X = x_1 \bullet (x_2 \bullet x_3)$ et donc, comme l'associativité des mots est vérifiée, on a également : $X = (x_1 \bullet x_2) \bullet x_3$

Or $x_1x_2 \in L_1 \bullet L_2$ et $x_3 \in L_3$

Donc $X \in (L_1 \bullet L_2) \bullet L_3$

On a bien $L_1 \bullet (L_2 \bullet L_3) \subset (L_1 \bullet L_2) \bullet L_3$

b) $\Leftarrow$ Montrons que $(L_1 \bullet L_2) \bullet L_3 \subset L_1 \bullet (L_2 \bullet L_3)$

Même raisonnement qu'en a)

Donc, d'après a) et b) on a bien $L_1 \bullet (L_2 \bullet L_3) = (L_1 \bullet L_2) \bullet L_3$

8) Le produit de langages est une opération distributive par rapport à l'union ?

A-t-on $L_1 \bullet (L_2 \cup L_3) = L_1 \bullet L_2 \cup L_1 \bullet L_3$?

$L_1 \bullet (L_2 \cup L_3) = \{ m_1 \bullet m_{23} \,/\, m_1 \in L_1 \text{ et } m_{23} \in L_2 \cup L_3 \}$

Or $m_{23} \in L_2 \cup L_3 \Rightarrow (m_{23} \in L_2)$ ou $(m_{23} \in L_3)$

Donc $L_1 \bullet (L_2 \cup L_3) = \{ m_1 \bullet m_{23} \,/\, (m_1 \in L_1) \text{ et } (m_{23} \in L_2 \text{ ou } m_{23} \in L_3) \}$

$= \{ m_1 \bullet m_{23} \,/\, (m_1 \in L_1 \text{ et } m_{23} \in L_2) \text{ ou } (m_1 \in L_1 \text{ et } m_{23} \in L_3) \}$

(par distributivité du « et » par rapport au « ou »)

$= L_1 \bullet L_2 \cup L_1 \bullet L_3$