Université d'Aix-Marseille III – Faculté des Sciences et Techniques de Saint-Jérôme
M7 – Mathématiques de l'Informatique (2002/2003)

Correction de la Feuille d'exercices n°1 (Partie 2)

On appelle **langage formel** sur un alphabet V le sous-ensemble de mots $L \subseteq V^*$ formé de symboles de V. (ex : $V = \{ a, b \}$ $L = \{ a, aa, ab, bab\}$ $L_2 = \{ \in, a \}$.
Opérations sur les langages :
Intersection : $L_3 = L_1 \cap L_2 = \{ x \in V^* / x \in L_1 \text{ et } x \in L_2 \}$
Union : $L_3 = L_1 \cup L_2 = \{ x \in V^* / x \in L_1 \text{ ou } x \in L_2 \}$
Différence : $L_3 = L_1 - L_2 = \{ x \in V^* / x \in L_1 \text{ et } x \notin L_2 \}$
Concaténation (ou Produit) : $L_3 = L_1 \bullet L_2 = \{ m_1m_2 / m_1 \in L_1 \text{ et } m_2 \in L_2 \}$
Exemples : $V = \{ a, b \}$ $L_1 = \{ ab, aa \}$ $L_2 = \{ aa, ba \}$
$L_3 = L_1 \cap L_2 = \{ aa\}$
$L_4 = L_1 \cup L_2 = \{ ab, aa, ba \}$
$L_5 = L_1 - L_2 = \{ ab \}$ $L_6 = L_2 - L_1 = \{ ba \}$

9) Le produit des langages n'est pas distributif par rapport à l'intersection ?
$\exists L_1, L_2, L_3 \subseteq V^*$ tels que $L_1 \bullet (L_2 \cap L_3) \neq L_1 \bullet L_2 \cap L_1 \bullet L_3$
Contre-exemple : $L_1, L_2, L_3 \subseteq V = \{ a \}$
$L_1 = \{ a, aa \}$ $L_2 = \{ a \}$ $L_3 = \{ aa \}$
$L_1 \bullet (L_2 \cap L_3) = \varnothing$
$L_1 \bullet L_2 \cap L_1 \bullet L_3 = \{ aaa \}$

10) ε_X élément neutre pour le produit de langages ?
A-t-on $L \bullet \varepsilon_X = \varepsilon_X \bullet L = L$?
$L \bullet \varepsilon_X = \{ m_1m_2 / m_1 \in L \text{ et } m_2 \in \{ \varepsilon_X \} \}$
$= \{ m_1\varepsilon_X / m_1 \in L \} = \{ m_1 / m_1 \in L \} = L$
$\varepsilon_X \bullet L = \{ m_1m_2 / m_1 \in \{ \varepsilon_X \} \text{ et } m_2 \in L \}$
$= \{ \varepsilon_X m_2 / m_2 \in L \} = \{ m_2 / m_2 \in L \} = L$
Donc $L \bullet \varepsilon_X = \varepsilon_X \bullet L = L$

11) Montrons que $A^+ = A \bullet A^* = A^* \bullet A$
On notera u_n la lettre d'indice n du mot u.
$A^* = \{ u / u_n \in A \text{ et } |u| \geq 0 \}$
$A^+ = \{ u / u_n \in A \text{ et } |u| \geq 1 \}$
Donc $A \bullet A^* = \{ uv / u \in A \text{ et } v \in A^* \}$
$= \{ uv / u \in A \text{ et } v \text{ tq } v_n \in A \text{ et } |v| \geq 0 \}$
En posant $w = uv$:
$= \{ w / w_n \in A \text{ (car } u \in A \text{ et } v_n \in A) \text{ et } |w| \geq 1 \text{ (car } |u| = 1) \}$
$= A^+$
Même raisonnement pour $A^* \bullet A = A^+$

12) Il existe des alphabets A_1 et A_2 tels que $(A_1 \cup A_2)^* \neq A_1^* \cup A_2^*$?
$(A_1 \cup A_2)^*$ est l'ensemble des mots possibles sur $A_1 \cup A_2$ y compris ε.
$A_1^* \cup A_2^*$ est l'ensemble des mots possibles sur A_1 y compris ε ou possibles sur A_2 y compris ε.
Pour $A_1 = \{ a, b\}$ et $A_2 = \{ c \}$, on a $ac \in (A_1 \cup A_2)^*$ mais $ac \notin A_1^* \cup A_2^*$ (seuls les mots formés uniquement des lettres de A_1 ou uniquement des lettres de A_2 appartiennent à $A_1^* \cup A_2^*$).

13) Quels que soient A_1 et A_2 on a $(A_1 \cup A_2)^* \supseteq A_1^* \cup A_2^*$?
$A_1^* = \{ u \,/\, u_m \in A_1^* \text{ et } |u| \geq 0 \}$
$A_2^* = \{ v \,/\, v_m \in A_2^* \text{ et } |v| \geq 0 \}$
$A_1^* \cup A_2^* = \{ w \,/\, w \in A_1^* \text{ ou } w \in A_2^* \}$
$= \{ w \,/\, (w_m \in A_1 \text{ et } |w| \geq 0) \text{ ou } (w_m \in A_2 \text{ et } |w| \geq 0) \}$
$\subseteq \{ w \,/\, (w_m \in A_1 \text{ ou } w_m \in A_2) \text{ et } |w| \geq 0 \}$
$\subseteq (A_1 \cup A_2)^*$
Donc $(A_1 \cup A_2)^* \supseteq A_1^* \cup A_2^*$

14) a) $\mathbf{L_1 = \{a^n.b^n \,/\, n \geq 0\}}$

α) $L_1 = \{ a^n.b^n \,/\, n \geq 0\} = \{ \varepsilon, ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, \ldots \}$ avec $X = \{ a, b \}$
$u \in X^* = \{ \varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, bbb, bba, bab, baa, \ldots \}$
Pour un mot de taille k, 2^k mots possibles …
$FG(L_1) = \{ \varepsilon, a, ab, aa, aaa, aab, aabb\ aaab, \ldots \}$
$FG(L_1) = \{ a^m.b^{m-n} \,/\, 0 \leq n \leq m \}$
En effet, pour n=0 on génère les $a^m.b^m$, pour n=m on génère les a^m, et sinon on génère les $a^m.b^{m-n}$.
Démonstration :
Montrons que $\{ a^{m-n}.b^m \,/\, 0 \leq n \leq m \} = \{ u \in X^* \,/\, u \bullet X^* \cap L_1 \neq \varnothing \}$
Soit : $\underset{\substack{\uparrow \\ A}}{\{ a^m.b^{m-n} \,/\, 0 \leq n \leq m \}} = \{ u \in X^* \,/\, \underset{\substack{\uparrow \\ B}}{u \bullet X^* \cap \{ a^n.b^n \,/\, 0 \leq n \} \neq \varnothing} \}$
A est l'ensemble des u vérifiant la propriété B.
• $A \subset B$ ie : tous les éléments de l'ensemble A sont dans l'ensemble B.
A-t-on $\{ a^m.b^{m-n} \,/\, 0 \leq n \leq m \} \bullet X^* \cap \{ a^n.b^n \,/\, 0 \leq n \} \neq \varnothing$?
Evident pour m=1, n=0 et n=1 (dans le second ensemble)
$ab \,.\, X^* \cap ab = \{ ab \} \neq \varnothing \quad (\varepsilon \in X^*)$
• $B \subset A$ ie : tous les éléments de l'ensemble B sont dans l'ensemble A.
A-t-on $\{ u \in X^* \,/\, u \bullet X^* \cap \{ a^n.b^n \,/\, 0 \leq n \} \neq \varnothing \} \subset \{ a^m.b^{m-n} \,/\, 0 \leq n \leq m \}$?
On pose $u = a^k\, b^p$ avec $k \geq 0$ et $p \geq 0$
$a^k\, b^p \,.\, X^* \cap \{ a^n.b^n \,/\, 0 \leq n \} \neq \varnothing$?
$a^k\, b^p \,.\, a^r \cap \{ a^n.b^n \,/\, 0 \leq n \} = \varnothing$
$a^k\, b^p \,.\, b^r \cap \{ a^n.b^n \,/\, 0 \leq n \} \neq \varnothing$ ssi : $p+r = n$ et $k = n \Rightarrow p = n-r$
comme $p \geq 0 \Rightarrow n-r \geq 0 \;\Rightarrow n \geq r$
Donc ssi $u \in \{ a^n.b^{n-r} \,/\, 0 \leq r \leq n \}$
Donc $\{ a^m.b^{m-n} \,/\, 0 \leq n \leq m \} = \{ u \in X^* \,/\, u \bullet X^* \cap L_1 \neq \varnothing \}$

β) $L_1 = \{ a^n.b^n / n \geq 0 \} = \{ \varepsilon, ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, \dots \}$ avec $X = \{ a, b \}$

$u \in X^* = \{ \varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, bbb, bba, bab, baa, \dots \}$

Pour un mot de taille k, 2^k mots possibles …

$FD(L_1) = \{ \varepsilon, b, ab, bb, abb, aabb, bbb, abbb, aabbb, aaabbb, \dots \}$

$FD(L_1) = \{ a^{m-n}.b^m / 0 \leq n \leq m \}$

En effet, pour n=0 on génère les $a^m.b^m$, pour n=m on génère les b^m, et sinon on génère les $a^{m-n}.b^m$.

Démonstration :

Montrons que $\{ a^{m-n}.b^m / 0 \leq n \leq m \} = \{ u \in X^* / X^* \bullet u \cap L_1 \neq \emptyset \}$

Soit : $\underset{\underset{A}{\uparrow}}{\{ a^{m-n}.b^m / 0 \leq n \leq m \}} = \{ u \in X^* / X^* \bullet u \cap \underset{\underset{B}{\uparrow}}{\{ a^n.b^n / 0 \leq n \}} \neq \emptyset \}$

A est l'ensemble des u vérifiant la propriété B.

- $A \subset B$ ie : tous les éléments de l'ensemble A sont dans l'ensemble B.

A-t-on $X^* \bullet \{ a^{m-n}.b^m / 0 \leq n \leq m \} \cap \{ a^n.b^n / 0 \leq n \} \neq \emptyset$?

Evident pour m=1, n=0 et n=1 (dans le second ensemble)

$X^* . ab \cap ab = \{ ab \} \neq \emptyset \quad (\varepsilon \in X^*)$

- $B \subset A$ ie : tous les elements de l'ensemble B sont dans l'ensemble A.

A-t-on $\{ u \in X^* / X^* \bullet u \cap \{ a^n.b^n / 0 \leq n \} \neq \emptyset \} \subset \{ a^{m-n}.b^m / 0 \leq n \leq m \}$?

On pose $u = a^k b^p$ avec $k \geq 0$ et $p \geq 0$

$X^* . a^k b^p \cap \{ a^n.b^n / 0 \leq n \} \neq \emptyset$?

$b^r . a^k b^p \cap \{ a^n.b^n / 0 \leq n \} = \emptyset$

$a^r . a^k b^p \cap \{ a^n.b^n / 0 \leq n \} \neq \emptyset$ ssi : $r+k = n$ et $p = n \Rightarrow k = n-r$

comme $k \geq 0 \Rightarrow n-r \geq 0 \;\Rightarrow n \geq r$

Donc ssi $u \in \{ a^{n-r}.b^n / 0 \leq r \leq n \}$

Donc $\{ a^{m-n}.b^m / 0 \leq n \leq m \} = \{ u \in X^* / X^* \bullet u \cap L_1 \neq \emptyset \}$

b) $\mathbf{L_2 = \{a^n.b^m / 0 \leq n \leq m \}}$

α) $L_2 = \{ a^n.b^m / 0 \leq n \leq m \} = \{ \varepsilon, b, ab, bb, abb, aabb, bbb, abbb, aabbb, aaabbb, \dots\}$

$FG(L_2) = \{ \varepsilon, a, b, aa, ab, bb, abb, aab, aaa, bbb, aabb, abbb, \dots \}$

Démonstration :

A-t-on $\{ u \in X^* / u \bullet X^* \cap \{ a^n.b^m / 0 \leq n \leq m \} \neq \emptyset \}$?

On pose $u = a^k b^p$ avec $k \geq 0$ et $p \geq 0$

$a^k b^p . X^* \cap \{ a^n.b^m / 0 \leq n \leq m \} \neq \emptyset$?

$a^k b^p . a^r \cap \{ a^n.b^m / 0 \leq n \leq m \} = \emptyset$

$a^k b^p . b^s \cap \{ a^n.b^m / 0 \leq n \leq m \} \neq \emptyset$ ssi : $k = n$ et $p+s = m$

Or $p = m-s \geq 0 \Rightarrow m \geq s$ et donc $0 \leq n \leq s \leq m$

Donc ssi $u \in \{ a^n.b^{m-s} / 0 \leq n \leq s \leq m \}$

Donc $\{ a^n.b^{m-s} / 0 \leq n \leq s \leq m \} = \{ u \in X^* / u \bullet X^* \cap L_2 \neq \emptyset \}$

β) $L_2 = \{ a^n.b^m \;/\; 0 \le n \le m \} = \{ \varepsilon, b, ab, bb, abb, aabb, bbb, abbb, aabbb, aaabbb, ...\}$

$FD(L_2) = \{ \varepsilon, b, ab, bb, abb, aabb, bbb, abbb, \ldots \}$

$FD(L_2) = L_2 = \{ a^n.b^m \;/\; 0 \le n \le m \}$

Démonstration :

Montrons que $\{ a^n.b^m \;/\; 0 \le n \le m \} = \{ u \in X^* \;/\; X^* \bullet u \cap L_2 \ne \varnothing \}$

Soit : $\underbrace{\{ a^n.b^m \;/\; 0 \le n \le m \}}_{A} = \{ u \in X^* \;/\; X^* \bullet u \cap \underbrace{\{ a^n.b^m \;/\; 0 \le n \le m \}}_{B} \ne \varnothing \}$

A est l'ensemble des u vérifiant la propriété B.

- $A \subset B$

A-t-on $X^* \bullet \{ a^n.b^m \;/\; 0 \le n \le m \} \cap \{ a^n.b^m \;/\; 0 \le n \le m \} \ne \varnothing$?

Evident pour n==m=1 et n=m=1 (dans le second ensemble)

$X^* .\ ab \cap ab = \{ ab \} \ne \varnothing$

- $B \subset A$

A-t-on $\{ u \in X^* \;/\; X^* \bullet u \cap \{ a^n.b^m \;/\; 0 \le n \le m \} \ne \varnothing \} \subset \{ a^n.b^m \;/\; 0 \le n \le m \}$?

On pose $u = a^k\, b^p$ avec $k \ge 0$ et $p \ge 0$

$X^* .\ a^k\, b^p \cap \{ a^n.b^m \;/\; 0 \le n \le m \} \ne \varnothing$?

$b^r .\ a^k\, b^p \cap \{ a^n.b^m \;/\; 0 \le n \le m \} = \varnothing$

$a^s .\ a^k\, b^p \cap \{ a^n.b^m \;/\; 0 \le n \le m \} \ne \varnothing$ ssi : $s+k = n$ et $p = m \Rightarrow k = n\text{-}s$

Or $0 \le n \le m \;\Rightarrow 0 \le s{+}k \le p \;\Rightarrow 0 \le k \le p\text{-}s$ et donc $0 \le s \le n \le p$

Donc ssi $u \in \{ a^{n-s}.b^p \;/\; 0 \le s \le n \le p \}$ équivalent de $\{ a^n.b^m \;/\; 0 \le n \le m \}$

Donc $\{ a^n.b^m \;/\; 0 \le n \le m \} = \{ u \in X^* \;/\; X^* \bullet u \cap L_2 \ne \varnothing \}$

c) **$L_3 = \{u \in X^* \;/\; |u|_a = |u|_b\}$**

α) $L_3 = \{ u \in X^* \;/\; |u|_a = |u|_b \} = \{ \varepsilon, b, a, ab, ba, bb, aa, abb, baa, bba, aab, aba, bab, \ldots\}$

$FG(L_3) = \{ \varepsilon, b, a, ab, ba, bb, aa, abb, baa, bba, aab, aba, bab, \ldots \}$

$FG(L_3) = X^*$

Démonstration :

Montrons que $X^* = \{ u \in X^* \;/\; u \bullet X^* \cap L_3 \ne \varnothing \}$

Soit : $\underbrace{X^*}_{A} = \{ u \in X^* \;/\; u \bullet \underbrace{X^*}_{B} \cap \{ u \in X^* \;/\; |u|_a = |u|_b \} \ne \varnothing \}$

A est l'ensemble des u vérifiant la propriété B.

- $A \subset B$

A-t-on $X^* \bullet X^* \cap \{ u \in X^* \;/\; |u|_a = |u|_b \} \ne \varnothing$?

Evident pour ab et u=ab

$X^* .\ ab \cap ab = \{ ab \} \ne \varnothing$

- $B \subset A$

A-t-on $\{ u \in X^* \;/\; u \bullet X^* \cap \{ u \in X^* \;/\; |u|_a = |u|_b \} \ne \varnothing \} \subset X^*$?

On pose $v \in X^*$

$v .\ X^* \cap \{ u \in X^* \;/\; |u|_a = |u|_b \} \ne \varnothing$?

$v .\ b^r \cap \{ u \in X^* \;/\; |u|_a = |u|_b \} \ne \varnothing$ ssi : $v = \{ w \in X^* \;/\; |w|_a = |w|_b + r \} = X^*$

$v .\ b^s \cap \{ u \in X^* \;/\; |u|_a = |u|_b \} \ne \varnothing$ ssi : $v = \{ w \in X^* \;/\; |w|_a + s = |w|_b \} = X^*$

Donc $X^* = \{ u \in X^* \;/\; X^* \bullet u \cap L_3 \ne \varnothing \}$

β) $L_3 = \{ u \in X^* / |u|_a = |u|_b \} = \{ \varepsilon, b, a, ab, ba, bb, aa, abb, baa, bba, aab, aba, bab, \ldots \}$

$FD(L_3) = \{ \varepsilon, b, a, ab, ba, bb, aa, abb, baa, bba, aab, aba, bab, \ldots \}$

$FD(L_3) = X^*$

Démonstration :

Montrons que $X^* = \{ u \in X^* / X^* \bullet u \cap L_3 \neq \emptyset \}$

Soit : $\underset{\substack{\uparrow \\ A}}{X^*} = \{ u \in X^* / X^* \bullet u \cap \{ \underset{\substack{\uparrow \\ B}}{u \in X^*} / |u|_a = |u|_b \} \neq \emptyset \}$

A est l'ensemble des u vérifiant la propriété B.

- $A \subset B$

A-t-on $X^* \bullet X^* \cap \{ u \in X^* / |u|_a = |u|_b \} \neq \emptyset$?

Evident pour ab et u=ab

$X^* . ab \cap ab = \{ ab \} \neq \emptyset$

- $B \subset A$

A-t-on $\{ u \in X^* / X^* \bullet u \cap \{ u \in X^* / |u|_a = |u|_b \} \neq \emptyset \} \subset X^*$?

On pose $v \in X^*$

$X^* . v \cap \{ u \in X^* / |u|_a = |u|_b \} \neq \emptyset$?

$b^r . v \cap \{ u \in X^* / |u|_a = |u|_b \} \neq \emptyset$ ssi : $v = \{ w \in X^* / |w|_a = |w|_b + r \} = X^*$

$a^s . v \cap \{ u \in X^* / |u|_a = |u|_b \} \neq \emptyset$ ssi : $v = \{ w \in X^* / |w|_a + s = |w|_b \} = X^*$

Donc $X^* = \{ u \in X^* / X^* \bullet u \cap L_3 \neq \emptyset \}$