Université d'Aix-Marseille III – Faculté des Sciences et Techniques de Saint-Jérôme
M7 – Mathématiques de l'Informatique (2002/2003)

Correction de la Feuille d'exercices n°2

Une **grammaire** G est un quadruplet $G = (V_T, V_N, S, P)$ où :

- V_T : Ensemble fini non vide de symboles terminaux appelé alphabet terminal (minuscules).
- V_N : Ensemble fini non vide de symboles non terminaux appelé alphabet non terminal (majuscules) tels que $V_T \cap V_N = \varnothing$ et $V_T \cup V_N = V$.
- S : Elément particulier de V_N appelé **axiome** de la grammaire G.
- P : Ensemble fini de règles de production.

Classification des grammaires :

Type 0 : Aucune contrainte sur les règles de production.

Type 1 : Grammaires à contexte lié (dépendant du contexte). Les règles de production sont de la forme : $I' \, A \, I'' \rightarrow I' \, w \, I''$ où $I', I'' \in (V_T \cup V_N)^*$, $A \in V_N$ et $w \in (V_T \cup V_N)^+$.
Donc I' et I'' peuvent représenter ε et toute composition de terminaux et non terminaux, A est un non terminal et w est un terminal ou un non terminal mais en aucun cas ε. Seule la règle $S \rightarrow \varepsilon$ est permise.

Type 2 : Grammaire à contexte free (indépendante du contexte). Toute règle de production est de la forme : $A \rightarrow w$ tel que $A \in V_N$ (symbole non terminal) et $w \in (V_T \cup V_N)^*$ (composition de symboles terminaux et non terminaux y compris ε).

Type 3 : Grammaire linéaire / régulière
$A \rightarrow wB \mid w$ avec $A, B \in V_N$, $w \in V_T^*$ ⇒ linéaire droite
$A \rightarrow Bw \mid w$ avec $A, B \in V_N$, $w \in V_T^*$ ⇒ linéaire gauche
Quand $|w| \leq 1$ on dit que la grammaire est régulière (linéaire simple).

1) S → atgAF
A → aB | tB | cB | gB | ε
F → taa | tag | tga
B → aC | tC | cC | gC
C → aA | tA | cA | gA

2) S → (P) | S + S | S – S | S * S | S / S | D
P → S + S | S – S | S * S | S / S
D → 0D | … | 9D | 0 | … | 9

3) S → aA | … | zA | 'A'A | … | ZA
A → aA | … | zA | 'A'A | … | ZA | 0A | … | 9A | _A | ε

4) S → <pseudohtml><body>B</ydob></lmthoduesp>
I → aAa | … | zAz | 'A'A'A' | … | ZAZ
A → aAa | … | zAz | 'A'A'A' | … | ZAZ | 0A0 | … | 9A9 | _A_ | P>C</
B → <I>B | ε
C → aD | … | zD | AD | … | ZD | … | 0D | … | 9D | _D
D → aD | … | zD | AD | … | ZD | … | 0D | … | 9D | _D | ε
P → E=C P | ε
E → aF | … | zF | AF | … | ZF
F → aF | … | zF | AF | … | ZF | 0F | … | 9F | _F | ε

5) a) $L_1 = \{ a^nb^n \,/\, n \geq 0 \}$
G : $S \rightarrow aSb$ (1) | ε (2)
Type 2
<u>Démonstration :</u>
- $L_1 \subset L_1(G)$? A partir de S peut-on dériver L_1 ?
  $S \Rightarrow a^nSb^n \Rightarrow a^nb^n$
  (1) (2)
  $n \geq 0$
- $L_1(G) \subset L_1$? Toute dérivation à partir de S est-elle de la forme L_1 ?
  $S \Rightarrow a^nSb^n \Rightarrow a^nb^n$
  (1) (2)
  $n \geq 0$

b) $L_2 = \{a^nb^pc^q \,/\, n\geq 1, p\geq 1, q\geq 1 \}$
$S \rightarrow aAbBcC$ (1)
$A \rightarrow aA$ (2) | ε (3)
$B \rightarrow bB$ (4) | ε (5)
$C \rightarrow cC$ (6) | ε (7)
Type 2
<u>Démonstration :</u>
- $L_2 \subset L_2(G)$? A partir de S peut-on dériver L_2 ?
  $S \Rightarrow aAbBcC \Rightarrow aa^nAbBcC \Rightarrow a^nbBcC \Rightarrow a^nbb^pBcC \Rightarrow a^nb^pcC \Rightarrow a^nb^pc^q$
  (1) (2) (3) (4) (5) (6) puis (7)
  $n \geq 0$ $n \geq 1$ $p \geq 0$ $p \geq 1$ $q \geq 1$
- $L_2(G) \subset L_2$? Toute dérivation à partir de S est-elle de la forme L_2 ?
  $S \Rightarrow aAbBcC \Rightarrow aa^nAbBcC \Rightarrow a^nbBcC \Rightarrow a^nbb^pBcC \Rightarrow a^nb^pcC \Rightarrow a^nb^pc^q$
  (1) (2) (3) (4) (5) (6) puis (7)
  $n \geq 0$ $n \geq 1$ $p \geq 0$ $p \geq 1$ $q \geq 1$

c) $L_3 = \{a^n b^p \ / \ n>p>0\}$

$S \rightarrow aA$ (1)

$A \rightarrow aA$ (2) | aAb (3) | ab (4)

Type 2

<u>Démonstration :</u>

- $L_3 \subset L_3(G)$? A partir de S peut-on dériver L_3 ?

  $S \Rightarrow aA \Rightarrow aa^nAb^n \Rightarrow aa^nabb^n \approx a^nb^p$

  (1) (3) (4)

  $n \geq 0$ $n > p > 0$

- $L_3(G) \subset L_3$? Toute dérivation à partir de S est-elle de la forme L_3 ?

  $S \Rightarrow aA \Rightarrow aa^nAb^n \Rightarrow aa^nabb^n \approx a^nb^p$

  (1) (3) (4)

  $n \geq 0$ $n > p > 0$

  $S \Rightarrow aA \Rightarrow aa^nA \Rightarrow aa^naAb \Rightarrow \ldots \approx a^nb^p$

  (1) (2) (3)

  $n \geq 0$ $n > p > 0$

d) $L_4 = \{a^n b^m \ / \ n \neq m, n, m \geq 0\}$

$S \rightarrow AE$ (1) | EB (2)

$E \rightarrow aEb$ (3) | ε (4)

$A \rightarrow aA$ (5) | a (6)

$B \rightarrow bB$ (7) | b (8)

Type 2

<u>Démonstration :</u>

- $L_4 \subset L_4(G)$? A partir de S peut-on dériver L_4 ?

  $S \Rightarrow AE \Rightarrow Aa^mEb^m \Rightarrow Aa^mb^m \Rightarrow a^nAa^mb^m \Rightarrow a^nb^m$

  (1) (3) (4) (5) (6)

  $m \geq 0$ $n \geq 0$ $n \neq m, n, m \geq 0$

- $L_4(G) \subset L_4$? Toute dérivation à partir de S est-elle de la forme L_4 ?

  $S \Rightarrow AE \Rightarrow Aa^mEb^m \Rightarrow Aa^mb^m \Rightarrow a^nAa^mb^m \Rightarrow a^nb^m$

  (1) (3) (4) (5) (6)

  $m \geq 0$ $n \geq 0$ $n \neq m, n, m \geq 0$

  $S \Rightarrow EB \Rightarrow a^nEb^nB \Rightarrow a^nb^nB \Rightarrow a^nb^nb^mB \Rightarrow a^nb^m$

  (2) (3) (4) (5) (6)

  $n \geq 0$ $m \geq 0$ $n \neq m, n, m \geq 0$

  $S \Rightarrow \ldots$

Les démonstrations étant toujours du même type, elles ne sont plus données dans la suite.

e) $L_5 = \{a^n b^p c^n d^q \ / \ n,p,q>0\} \cup \{a^p b^n c^q d^n \ / \ n,p,q>0\}$

$S \rightarrow aAbBcD$ (1) | $aEbFcGd$ (2)
$aA \rightarrow aaC$ (3) | $aaAC$ (4)
$Cb \rightarrow bC$ (5)
$CB \rightarrow BC$ (6)
$Cc \rightarrow cc$ (7)
$bB \rightarrow b$ (8) | bbB (9)
$D \rightarrow d$ (10) | dD (11)
$aE \rightarrow a$ (12) | aaE (13)
$bF \rightarrow bbH$ (14) | $bbFH$ (15)
$Hc \rightarrow cH$ (16)
$HG \rightarrow GH$ (17)
$Hd \rightarrow dd$ (18)
$cG \rightarrow c$ (19) | ccG (20)
Type 0

f) $L_6 = \{a^n b^p c^q \ / \ n,q \geq 0, \ p \geq n+q\}$

$S \rightarrow aB$ (1) | bC (2) | $aBCc$ (3) | ε (4)
$B \rightarrow bB$ (5) | aBb (6) | b (7)
$C \rightarrow bC$ (8) | bCc (9) | b (10)
Type 2

g) $L_7 = \{a^n b^p \ / \ n \neq p+3\}$

Cas $n > p+3$: $a^j aaaa^p b^p \quad j > 0$
Cas $n = p+3$: interdit
Cas $n < p+3$: $aaa^p b^p$
$aa^p b^p$
$$\left.\begin{array}{l} a^p b^p \\ a^p b^p b^i \quad i > 0 \end{array}\right\} a^p b^p b^i \quad i \geq 0$$

$S \rightarrow AaaaE$ (1) | aaE (2) | aE (3) | EB (4)
$E \rightarrow aEb$ (5) | ε (6)
$A \rightarrow a$ (7) | aA (8)
$B \rightarrow bB$ (9) | ε (10)
Type 2

h) $L_8 = \{a^n b^n c^p \ / \ n,p \geq 1\}$

$S \rightarrow aAbcC$ (1)
$A \rightarrow aAb$ (2) | ε (3)
$C \rightarrow cC$ (4) | ε (5)
Type 2

i) $L_9 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$

$S \rightarrow aSBC$ (1) | abC (2)

$CB \rightarrow BC$ (3)

$bB \rightarrow bb$ (4)

$bC \rightarrow bc$ (5)

$cC \rightarrow cc$ (6)

Type 0