Formulaire d'Analyse 1

Ensembles

Propriétés fondamentales

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure

Majorants, minorants

On dit que M est un majorant de X si: $\forall x \in X\ ,\ x \leq M$

On dit que m est un majorant de X si: $\forall x \in X\ ,\ m \leq x$

Caractérisation de la borne supérieure:

La borne supérieure est le plus petit des majorants

$$a = \sup(X) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall x \in X\ ,\ x \leq a \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_E \in X\ \ tel\ que\ \ a - \varepsilon < x_E \leq a \end{array}$$

Caractérisation de la borne inférieure:

La borne inférieure est le plus grand des minorants

$$b = \mathrm{Inf}(X) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall x \in X\ ,\ b \leq x \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_E \in X\ \ tel\, que\ \ b \leq x_E < b + \varepsilon \end{array}$$

Applications

Injectivitié, surjectivité, bijectivité

Soit $f: \begin{array}{l} E \rightarrow F \\ x \rightarrow f(x) \end{array}$

Si f injective: $\forall (x_{1,} x_2) \in E^2\ ,\ si\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Si f surjective: $\forall y \in F\ ,\ \exists x \in E$ tel que $f(x) = y$

Si f bijective: $\exists !\, x \in E$ tel que $f(x) = y\ ,\ \ y \in F$

Majorants, minorants

On dit que f est majorée si: $\exists M \in E$ tel que $\forall x \in F\ ,\ f(x) \leq M$

On dit que f est minorée si: $\exists m \in E$ tel que $\forall x \in F\ ,\ m \leq f(x)$

Egalités et inégalités diverses

Inégalité triangulaire:

$$\big|\, |x| - |y| \,\big| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$$

Propriété d'Archimède:

$\mathbb{R}$ est un corps archimédien: $\forall x > 0\ ,\ \forall y \in \mathbb{R}\ ,\ \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n \cdot x \geq y$

Partie Entière:

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$
n est noté $E(x)$ ou $[x]$ et s'appelle la partie entière

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists r \in \mathbb{R}$ tel que $x < r < y$

$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: $\forall (x, y) \in r^2, \exists w \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ tel que $x < w < y$

Suites

Propriétés incontournables:

Somme d'une suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison r, de premier terme p et de dernier terme n :
$S = (n-p+1) \cdot \frac{u_n + u_p}{2}$

Somme d'une suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison q, de premier terme p et de dernier terme n :
$S = \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Majorants, minorants:

On dit que $(u_n)_n$ est majorée si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq A$. Dans ce cas, A est un majorant de $(u_n)_n$

On dit que $(u_n)_n$ est minorée si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq a$. Dans ce cas, a est un minorant de $(u_n)_n$

On dit que $(u_n)_n$ est bornée si elle est majorée et minorée

Toute suite convergente est bornée

Suite convergentes et limites:

Une suite $(u_n)_n$ converge si $\exists l \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \textit{tel que} \forall \in \mathbb{N}, \textit{si } n \geq N_\varepsilon \textit{ alors } |(u_n - l)| < \varepsilon$

Toute suite croissante majorée est convergente vers $l = \sup(\{u_n, n \in \mathbb{N}\})$

Toute suite décroissante minorée est convergente vers $l = \text{Inf}(\{u_n, n \in \mathbb{N}\})$

Egalités et inégalité de limites

$\lim_{n \to +\infty} u_n + v_n = \lim_{n \to +\infty} u_n + \lim_{n \to +\infty} v_n$

$\lim_{n \to +\infty} u_n \cdot v_n = (\lim_{n \to +\infty} u_n) \cdot (\lim_{n \to +\infty} v_n)$

Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$, alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$

Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$, alors $\lim_{n \to +\infty} |u_n| = |l|$

Si $u_n < v_n$, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n \leq \lim_{n \to +\infty} v_n$
Si $u_n \leq v_n$, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n \leq \lim_{n \to +\infty} v_n$

Théorèmes de limites

(« gendarmes »): Soient $(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n \in \mathbb{R}$, si $\forall n \in \mathbb{N} u_n \leq v_n \leq w_n$, $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$, $\lim_{n \to +\infty} w_n = l$

Alors $\lim_{n\to+\infty} v_n=l$

(« ascenseur »): Soient $(u_n)_n,(v_n)_n\in\mathbb{R}$, si $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\leq v_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$

(« ??? ») Soient $(u_n)_n,(v_n)_n\in\mathbb{R}$, soit $l\in\mathbb{R}$, si $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n-l|\leq|v_n|$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=l$

<u>Segments emboités:</u>

Soit une suite $([a_n,b_n])_n$ d'intervalles bornés de $\mathbb{R}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ [a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$
Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]\neq\emptyset$, et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]$ est de la forme $[a,b]$
Si de plus $\lim_{n\to+\infty}[a_n,b_n]=0$
Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]=\{c\}$

<u>Suites divergentes:</u>

Une suite $(u_n)_n$ diverge si elle ne converge pas

Une suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$ si $\forall A>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \mathit{tel\ que}\ \forall n\in\mathbb{N},\ \mathit{si}\, n\geq n_0,\mathit{alors}\, u_n>A$

<u>Suites adjacentes</u>

Deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes si:
L'une est croissante, l'autre décroissante
$\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite

Remarque: si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes, $(u_n)_n$ croissante et $(v_n)_n$ décroissante, alors $u_n\leq v_n$